中文版

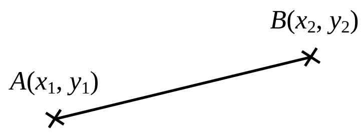
中三 坐標幾何

Revision Notes:

1. Distance formula 距離公式

The distance between any two points $A(x_1, y_1)$ and $B(x_2, y_2)$ n a rectangular coordinate plane is give by
直角坐標平面上任何兩點 $A(x_1, y_1)$和 $B(x_2, y_2)$之間的距離可表示成：

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



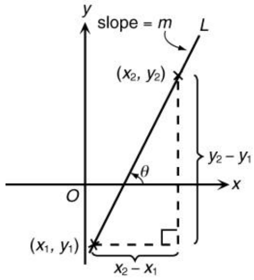
2. Slope and inclination **斜率與傾角**

The slope of the straight line L passing through (2, 1) and (3, 5)
通過 (2, 1) 和 (3, 5) 的直線 L 的斜率

$= \dfrac{5-1}{3-2}$ ◀ Substitute $x_1 = 2$, $y_1 = 1$, $x_2 = 3$ and $y_2 = 5$ into the formula $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

$= \dfrac{4}{1}$

$= \underline{\underline{4}}$



∵ Slope of L L 的斜率= tan θ ◀ θ is the inclination of L. θ 為 L 的傾角。

∴ $4 = \tan\theta$

$\theta = \underline{\underline{76.0°}}$ (cor. to 3 sig. fig.)

∴ The inclination of L is 76.0°. 直線 L 的傾角是 76.0°。

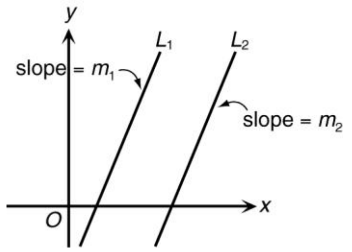
3. Parallel and perpendicular lines **平行線與垂直線**

Let m_1 and m_2 be the slopes of straight lines L_1 and L_2 respectively.
設 m_1 和 m_2 分別是直線 L_1 和 L_2 的斜率。

(a) Parallel lines 平行線

(i) If $L_1 // L_2$, then $m_1 = m_2$.
$L_1 // L_2$，則 $m_1 = m_2$。

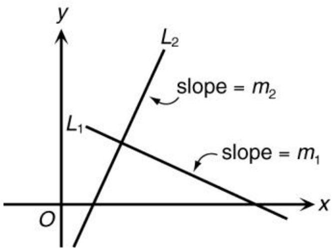
(ii) If $m_1 = m_2$, then $L_1 // L_2$.
若 $m_1 = m_2$，則 $L_1 // L_2$。



(b) Perpendicular lines 垂直線

(i) If $L_1 \perp L_2$, then $m_1 \times m_2 = -1$.
$L_1 \perp L_2$，則 $m_1 \times m_2 = -1$。

(ii) If $m_1 \times m_2 = -1$, then $L_1 \perp L_2$.
若 $m_1 \times m_2 = -1$，則 $L_1 \perp L_2$。

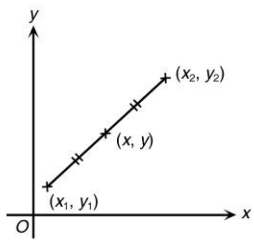


4. Mid-point formula

e.g. If $M(x, y)$ is the mid-point of the line segment joining $A(1, 6)$ and $B(3, 10)$, then
若 $M(x, y)$ 是連接 $A(1, 6)$ 和 $B(3, 10)$ 的線段的中點，則

$x = \dfrac{1+3}{2} = 2$ ◀ Substitute $x_1 = 1$ and $x_2 = 3$ into the formula $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$.

$y = \dfrac{6+10}{2} = 8$ ◀ Substitute $y_1 = 6$ and $y_2 = 10$ into the formula $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$.



5. Section formula

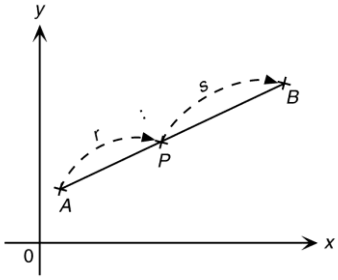
e.g. $P(x, y)$ is a point on the line segment joining $A(1, 1)$ and $B(4, 7)$. If $AP : PB = 1 : 2$, then

$$x = \frac{2(1)+1(4)}{1+2} = 2$$

◄ Substitute $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $r = 1$ and $s = 2$ into the formula $x = \frac{sx_1 + rx_2}{r+s}$.

$$y = \frac{2(1)+1(7)}{1+2} = 3$$

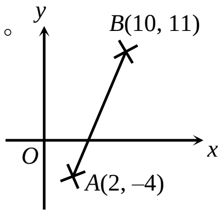
◄ Substitute $y_1 = 1$, $y_2 = 7$, $r = 1$ and $s = 2$ into the formula $y = \frac{sy_1 + ry_2}{r+s}$.



Worked examples:

e.g. 2.1 In the figure, the coordinates of A and B are (2, –4) and (10, 11) respectively. Find the distance between A and B.

圖中，A 和 B 的坐標分別是 (2, –4) 和 (10, 11)。求 A 和 B 之間的距離。



Solution

$AB = \sqrt{(10-2)^2 + [11-(-4)]^2}$ units 單位

$= \sqrt{8^2 + 15^2}$ units 單位

$= \sqrt{289}$ units 單位

= <u>17 units 單位</u>

e.g. 2.2 In the figure, $A(–3, 1)$, $B(4, 4)$ and $C(7, 1)$ are the vertices of $\triangle ABC$. Find the perimeter of $\triangle ABC$, correct to 3 significant figures.

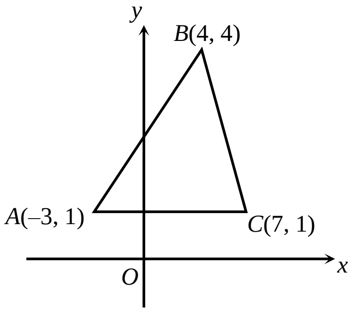
圖中，$A(–3, 1)$、$B(4, 4)$ 和 $C(7, 1)$ 是 $\triangle ABC$ 的頂點。求 $\triangle ABC$ 的周界，準確至三位有效數字。

Solution

$AC = [7 – (–3)]$ units 單位 = 10 units 單位

$AB = \sqrt{[4-(-3)]^2 + (4-1)^2}$ units 單位 $= \sqrt{58}$ units 單位

$BC = \sqrt{(7-4)^2 + (1-4)^2}$ units 單位 $= \sqrt{18}$ units 單位



Perimeter of $\triangle ABC$

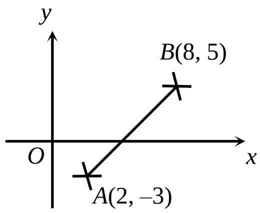
$= AC + AB + BC$

$= (10 + \sqrt{58} + \sqrt{18})$ units 單位

= <u>21.9 units 單位</u>, *cor. to 3 sig. fig. (準確至三位有效數字)*

e.g. 2.3 In the figure, the coordinates of A and B are (2, –3) and (8, 5) respectively. Find the slope of AB.

圖中，A 和 B 的坐標分別是 (2, –3) 和 (8, 5)。求 AB 的斜率。



Solution

Slope of AB AB 的斜率

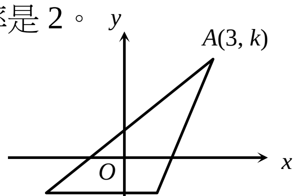
$= \frac{5-(-3)}{8-2}$

$= \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$

e.g. 2.4 In the figure, $A(3, k)$, $B(1, –1)$ and $C(–2, –1)$ are the vertices of $\triangle ABC$. It is given that the slope of AB is 2.

圖中，$A(3, k)$、$B(1, –1)$ 和 $C(–2, –1)$ 是 $\triangle ABC$ 的頂點。已知 AB 的斜率是 2。

(a) Find the value of k. 求 k 的值。



(b) Find the slope of *AC*. 求 *AC* 的斜率。

<u>*Solution*</u>

(a) Slope of *AB* *AB* 的斜率= 2

$$\frac{-1-k}{1-3} = 2$$

$$k = \underline{\underline{3}}$$

(b) Slope of *AC* *AC* 的斜率

$$= \frac{-1-3}{-2-3}$$

$$= \underline{\underline{\frac{4}{5}}}$$

e.g. 2.5 Determine whether $P(-1, 7)$, $Q(3, -4)$ and $R(7, -15)$ are collinear.
判斷 $P(-1, 7)$、$Q(3, -4)$ 和 $R(7, -15)$ 是否共線。

<u>*Solution*</u>

Slope of *PQ* *PQ* 的斜率

$$= \frac{-4-7}{3-(-1)}$$

$$= -\frac{11}{4}$$

Slope of *QR* *QR* 的斜率

$$= \frac{-15-(-4)}{7-3}$$

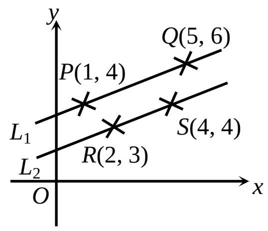
$$= -\frac{11}{4}$$

∵ Slope of *PQ* = slope of *QR* *PQ* 斜率 = *QR* 的斜率

∴ *P*, *Q* and *R* are collinear. *P*、*Q* 和 *R* 共線。

e.g. 2.6 In the figure, L_1 is a straight line passing through the points $P(1, 4)$ and $Q(5, 6)$ while L_2 is a straight line passing through the points $R(2, 3)$ and $S(4, 4)$. Show that $L_1 // L_2$.

<u>*Solution*</u>



Slope of L_1 L_1的斜率 = $\frac{6-4}{5-1} = \frac{1}{2}$

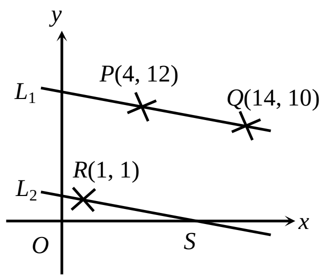
Slope of L_2 L_2的斜率= $\frac{4-3}{4-2} = \frac{1}{2}$

∵ Slope of L_1 = slope of L_2 L_1的斜率 = L_2的斜率

∴ $L_1 // L_2$

e.g. 2.7 In the figure, L_1 is a straight line passing through the points $P(4, 12)$ and $Q(14, 10)$. A straight line L_2 passes through the point $R(1, 1)$ and cuts the *x*-axis at *S*. If $L_1 // L_2$, find the coordinates of *S*.
圖中，L_1是一條通過 $P(4, 12)$ 和 $Q(14, 10)$ 的直線。L_2是一條通過 $R(1, 1)$ 的直線且與 *x* 軸相交於 *S*。若 $L_1 // L_2$，求 *S* 的坐標。

<u>*Solution*</u>



Let $(s, 0)$ be the coordinates of *S*. 設 *S* 的坐標為 $(s, 0)$。

∵ $L_1 // L_2$

∴Slope of L_1 = slope of L_2 L_1的的斜率= L_2的斜率

$$\frac{10-12}{14-4} = \frac{0-1}{s-1}$$

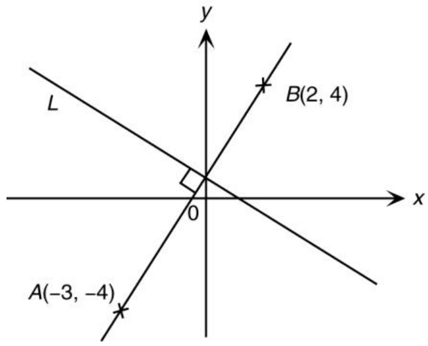
$$s = 6$$

∴ The coordinates of *S* are (6, 0). *S* 的坐標是 (6, 0)。

e.g. 2.8 In each of the following, the straight line L is perpendicular to AB. Find the slope of L.
在下列各題中，直線 L 垂直於 AB。求 L 的斜率。

Solution:

(a)



Slope of $AB = \dfrac{4-(-4)}{2-(-3)} = \dfrac{8}{5}$

$\because$ $L \perp AB$

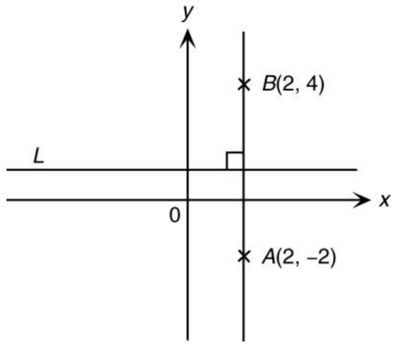
$\therefore$ Slope of L × slope of $AB = -1$

$$\text{Slope of } L \times \frac{8}{5} = -1$$

$$\text{Slope of } L = -1 \times \frac{5}{8}$$

$$= \underline{\underline{-\frac{5}{8}}}$$

(b)



$\because$ $L \perp AB$
and AB is a vertical line.
$\therefore$ L is a horizontal line.
$\therefore$ Slope of L = $\underline{\underline{0}}$

$\because$ $L \perp AB$
及 AB 是一條鉛垂線。
$\therefore$ L 是一條水平線。
$\therefore$ L 的斜率 = $\underline{\underline{0}}$

e.g. 2.9 (a) Given $A(2, -1)$, $B(6, 11)$, (x, y) is the mid-point of AB. Find the coordinates of M.
已知 $A(2, -1)$及 $B(6, 11)$ ，$M(x, y)$ 是 AB 的中點。求 M 的坐標。

(b) Given $A(1, 0)$, $M(3, 7)$, M is the mid-point of PQ. Find the coordinates of $Q(x, y)$.
已知 $A(1, 0)$及 $M(3, 7)$ ，M 是 PQ 的中點。求 $Q(x, y)$ 的坐標。

Solution:

(a) By the mid-point formula, we have 根據中點公式，可得：

$$x = \frac{(2)+(6)}{(2)} \qquad y = \frac{-1+11}{2}$$

$$= 4 \qquad\qquad = 5$$

$\therefore$ Coordinates of M M 的坐標 $= \underline{\underline{(4, 5)}}$

(b) By the mid-point formula, we have

$$(3) = \frac{(1)+x}{2} \quad \text{and} \quad (7) = \frac{(0)+y}{2}$$

$\therefore$ $x = 5$ and $y = 14$

$\therefore$ Coordinates of $Q = \underline{\underline{(5, 14)}}$

e.g. 2.9 Given $A(-6, 3)$, $B(6, -6)$, $P(x, y)$ is a point on the line segment AB such that $AP : PB = 2 : 1$. Find the coordinates of P.
已知 $A(-6, 3)$及 $B(6, -6)$，(x, y) 是連接 $A(1, 1)$ 和 $B(4, 7)$ 的線段上的一點，其中 $AP : PB = 2 : 1$。求 P 的坐標。

Solution:

By the section formula of internal division, we have 根據內分點的截點公式，可得：

$$x = \frac{1(-6) + 2(6)}{(2) + (1)} \qquad y = \frac{1(3) + 2(-6)}{(2) + (1)}$$

$$= (2) \qquad = (-3)$$

$\therefore$ Coordinates of $P = \underline{\underline{(2, -3)}}$

練習

1. 下列各題中，求所給兩點之間的距離。(如有需要，答案以根式表示。)

(a) $A(4, -3)$, $B(-2, 5)$ **(b)** $C(-9, 1)$, $D(6, -7)$

(c) $P(-6, -1)$, $Q(-1, 2)$ **(d)** $R(4, 10)$, $S(8, 3)$

2. 下列各題中，求通過所給兩點的直線的斜率。

(a) $A(-3, -5)$, $B(0, 1)$ **(b)** $C(1, -7)$, $D(4, 8)$

(c) $P(2, -7)$, $Q(6, -4)$ **(d)** $R(-5, -3)$, $S(7, 11)$

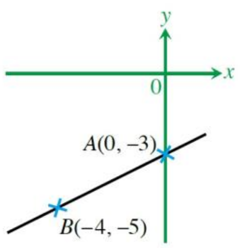
3. 下列各題中，判斷所給三點是否共線。

(a) $A(-5, -4)$, $B(1, -1)$, $C(7, 2)$ **(b)** $D(0, 5)$, $E(4, 3)$, $F(9, -1)$

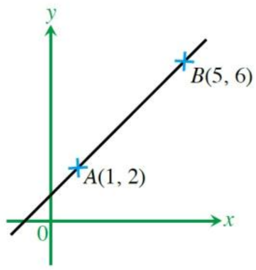
(c) $P(-3, 6)$, $Q(5, 4)$, $R(9, 3)$ **(d)** $S(-4, -6)$, $T(2, -2)$, $U(11, 4)$

4. 下列各題中，求通過 A 和 B 的直線的傾角。(如有需要，取答案準確至三位有效數字。)

(a)



(b)



5. 若通過 $P(k, -1)$和 $Q(-4, 3k + 2)$ 的直線的斜率是 $-\frac{3}{2}$，求 k 的值。

6. 下列各題中，求平行於線段 PQ 的直線的斜率。

(a) $P(4, -2)$, $Q(7, 3)$ **(b)** $P(-5, 5)$, $Q(1, 4)$

7. 下列各題中，求垂直於線段 AB 的直線的斜率。

(a) $A(-1, -5)$, $B(3, 9)$ **(b)** $A(6, 1)$, $B(10, -2)$

8. 下列各題中，證明 AB // CD。

(a) $A(1, 3)$, $B(7, 12)$, $C(-2, -6)$, $D(8, 9)$ **(b)** $A(-4, 8)$, $B(11, 2)$, $C(3, 5)$, $D(13, 1)$

9. 下列各題中，證明 $PQ \perp RS$。

(a) $P(-4, 6)$, $Q(5, 3)$, $R(-1, -9)$, $S(2, 0)$ **(b)** $P(-7, -5)$, $Q(-2, -1)$, $R(-8, 6)$, $S(4, -9)$

10. 考慮直角坐標平面上 $A(0, 4)$、$B(n - 1, n)$、$C(2, -5)$和 $D(6, -3)$四點。下列各情況中，求 n 的值。

(a) AB // CD **(b)** $AB \perp CD$

11. 下列各題中，求連接所給兩點的線段的中點的坐標。

(a) $A(3, -7)$, $B(5, 9)$ **(b)** $C(-1, 6)$, $D(7, -8)$

(c) $P(-4, 3)$, $Q(-2, -11)$ **(d)** $R(-5, 2)$, $S(-9, 10)$

12. M 是線段 PQ 的中點。M 和 P 的坐標分別是$(6, -2)$和$(4, 5)$。求 Q 的坐標。

13. 若 $P(-3, -8)$平分連接 $A(-7, p)$和 $B(q, 2)$的線段。求 p 和 q 的值。

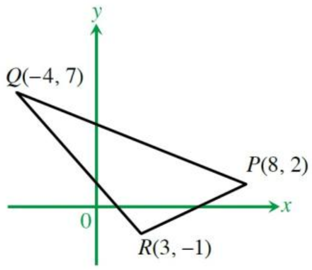
14. 下列各題中，P 是連接 A 和 B 的線段上的點。求 P 的坐標。

(a) $A(4, 9)$, $B(7, -3)$；$AP : PB = 2 : 1$
(b) $A(3, -6)$, $B(10, 1)$；$AP : PB = 4 : 3$
(c) $A(-5, 8)$, $B(9, -13)$；$AP : PB = 5 : 2$
(d) $A(-4, 2)$, $B(6, 12)$；$AP : PB = 3 : 7$

15. P 是線段 AB 上的點使 $AP : PB = 2 : 3$。B 和 P 的坐標分別是 $(10, -5)$ 和 $(1, 1)$。求 A 的坐標。

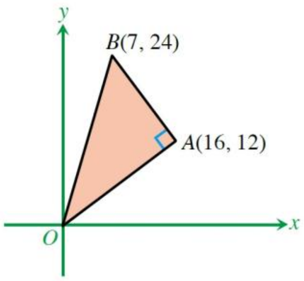
16. $P(-4, -2)$ 是連接 $A(h, -11)$ 和 $B(-3, k)$ 的線段上的點。若 $AP : PB = 3 : 1$，求 h 和 k 的值。

17. 圖中，$P(8, 2)$、$Q(-4, 7)$ 和 $R(3, -1)$ 是一塊三角形田地的頂點。一名農夫想用 30 m 長的圍欄圍着該田地。問圍欄的長度足夠嗎？試解釋你的答案。

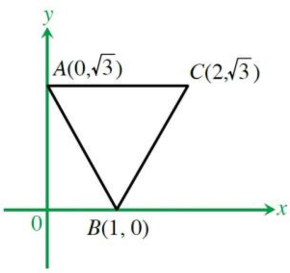


18. 圖中，O 是原點。A 和 B 的坐標分別是 $(16, 12)$ 和 $(7, 24)$。$\triangle OAB$ 是一個直角三角形，其中 $\angle A$ 是直角。

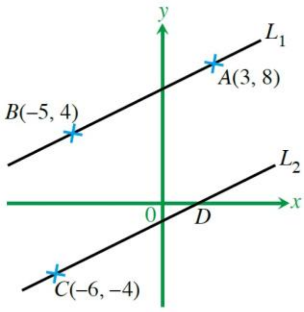
(a) 求線段 OA 和 AB 的長度。
(b) 求 $\triangle OAB$ 的面積。



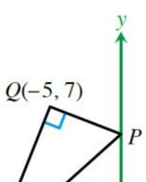
19. 圖中，$A(0, \sqrt{3})$、$B(1, 0)$ 和 $C(2, \sqrt{3})$ 是 $\triangle ABC$ 的頂點。$\triangle ABC$ 是一個等邊三角形嗎？試解釋你的答案。



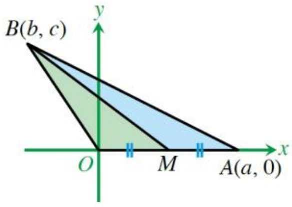
20. 圖中，L_1 是一條通過 $A(3, 8)$ 和 $B(-5, 4)$ 的直線。L_2 是一條通過 $C(-6, -4)$ 且與 x 軸相交於 D 的直線。若 $L_1 // L_2$，求 D 的坐標。



21. 圖中，$\triangle PQR$ 是一個直角三角形，其中 $\angle Q$ 是直角。Q 和 R 的坐標分別是 $(-5, 7)$ 和 $(-9, -3)$。P 是 y 軸上的一點。求 P 的坐標。



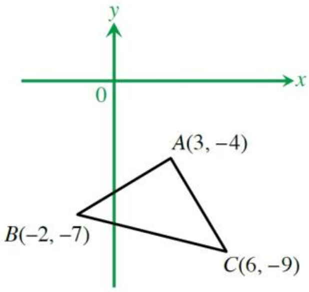
22. 圖中，△OAB 的頂點是 $A(a, 0)$、$B(b, c)$和 $O(0, 0)$。設 M 為 OA 的中點。證明△ABM 和△BOM 的面積相等。



23. 圖中，$A(3, –4)$、$B(–2, –7)$和 $C(6, –9)$是△ABC 的頂點。

(a) 求 AB、AC 和 BC 的長度。

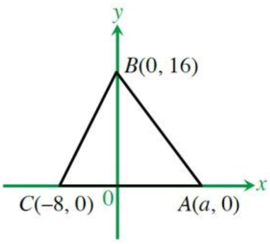
(b) 證明△ABC 是一個直角三角形。



24. 圖中，$A(a, 0)$、$B(0, 16)$和 $C(–8, 0)$是等腰三角形 ABC 的頂點，其中 $AB = AC$。

(a) 求 a 的值。

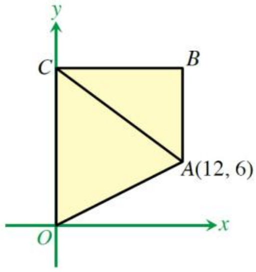
(b) 求△ABC 的周界，準確至三位有效數字。



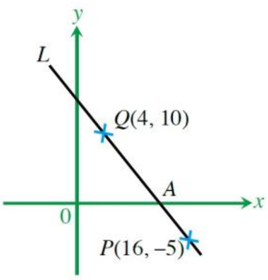
25. 圖中，$OABC$ 是一個四邊形。C 是正 y 軸上的一點和 A 的坐標是$(12, 6)$。AC 和 OC 的長度相等。

(a) 求 C 的坐標。

(b) 若 AB 是鉛垂線和 BC 是水平線，求 $OABC$ 的面積。

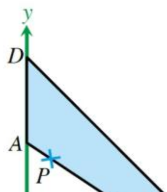


26. 圖中，L 是一條通過 $P(16, –5)$和 $Q(4, 10)$的直線。L 與 x 軸相交於 A。求 A 的坐標。



27. 圖中，B 和 C 是 x 軸上的點。A 和 D 是 y 軸上的點。P 是線段 AB 上的一點。B、C、D 和 P 的坐標分別是$(12, 0)$、$(18, 0)$、$(0, 18)$和$(3, 6)$。

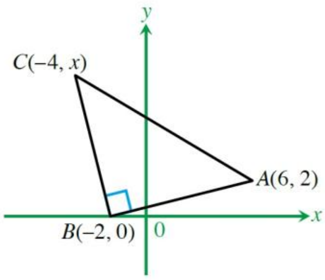
(a) 求 A 的坐標。



(b) 求四邊形 $ABCD$ 的面積。

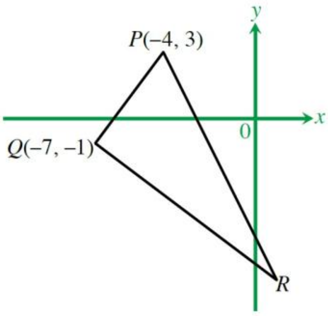
28. 圖中，$A(6, 2)$、$B(-2, 0)$ 和 $C(-4, x)$ 是直角三角形 ABC 的頂點，其中 $\angle B$ 是直角。

(a) 求 x 的值。
(b) 求 $\angle BAC$。



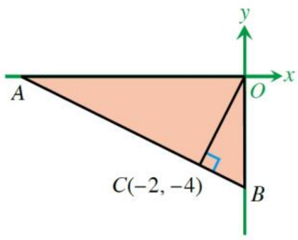
29. 圖中，P 和 Q 的坐標分別是 $(-4, 3)$ 和 $(-7, -1)$。Q 繞原點逆時針旋轉 $90°$ 至 R。

(a) 寫出 R 的坐標。
(b) $\triangle PQR$ 是否一個直角三角形？試解釋你的答案。



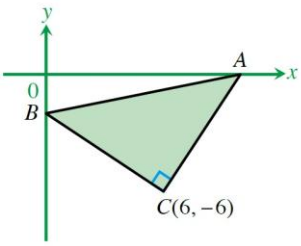
30. 圖中，A 在 x 軸上和 B 在 y 軸上。$C(-2, -4)$ 是 AB 上的一點，使 $OC \perp AB$。

(a) 求 A 和 B 的坐標。
(b) 求 $\triangle OAB$ 的面積。



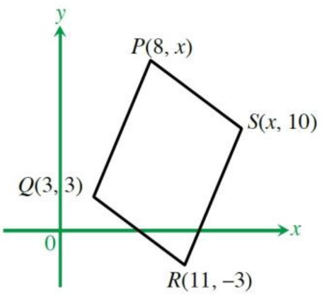
31. 圖中，A 在 x 軸上和 B 在 y 軸上。$\triangle ABC$ 是一個直角三角形，其中 $\angle C$ 是直角，且 C 的坐標是 $(6, -6)$。AC 的斜率是 $\dfrac{3}{2}$。

(a) 求 A 和 B 的坐標。
(b) 求 $\triangle ABC$ 的面積。



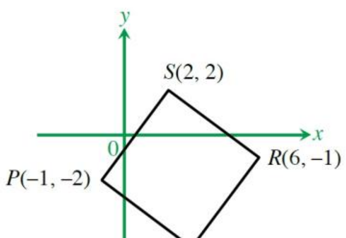
32. 圖中，$P(8, x)$、$Q(3, 3)$、$R(11, -3)$ 和 $S(x, 10)$ 是四邊形 $PQRS$ 的頂點，其中 $PS \parallel QR$。

(a) 求 x 的值。
(b) 求 $PQRS$ 的周界，準確至三位有效數字。



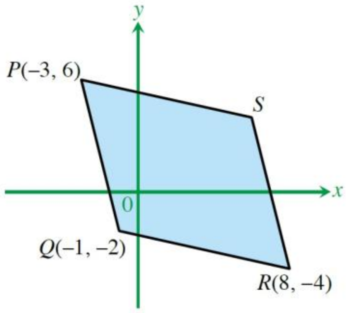
33. 圖中，$P(-1, -2)$、$Q(3, -5)$、$R(6, -1)$ 和 $S(2, 2)$ 是四邊形 $PQRS$ 的頂點。

(a) 求 PQ、QR、RS 和 PS。
(b) 證明 $PQRS$ 是一個正方形。



34. 圖中，$PQRS$ 是一個平行四邊形。P、Q 和 R 的坐標分別是$(-3, 6)$、$(-1, -2)$和$(8, -4)$。

(a) 求 S 的坐標。
(b) $T(x, y)$是 PQ 上的一點。
  (i) 以 x 表示 y。
  (ii) 若 $ST \perp PQ$，求 T 的坐標。
  (iii) 求 $PQRS$ 的面積。



35. 考慮 $A(3, 1)$和 $B(-2, 4)$兩點。C 是 x 軸上的一點使 $AC = BC$。
(a) 求 C 的坐標。
(b) 一位學生宣稱 C 是 AB 的中點。你同意嗎？試解釋你的答案。

36. 若 $M(p, q)$是連接 $A(q, 7)$和 $B(1, p)$的線段的中點，求 p 和 q 的值。

37. $P(-2, a)$是連接 $Q(2b, 5)$和 $R(a, b)$的線段上的一點。若 $QP : PR = 2 : 5$，求 a 和 b 的值。

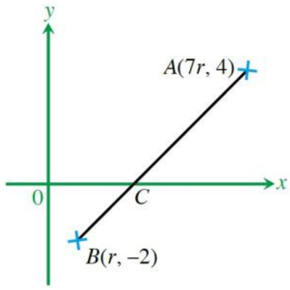
38. 考慮 $A(-10, 3p)$和 $B(6, p)$兩點。延長線段 AB 至 x 軸上的 C 點。
(a) 求 $AB : BC$。
(b) 設 $p = 4$。利用**(a)**部的結果，求 C 的坐標。

39. 考慮 $A(7, 1)$、$B(5, -1)$、$C(-3, -9)$和 $D(-2, -8)$四點。已知 M 是 AC 的中點。
(a) 求 M 的坐標。
(b) 證明 B、M 和 D 共線。
(c) 求 $BM : MD$。

40. 線段 AB 分別與 x 軸和 y 軸相交於 P 和 Q。若 A 的坐標是$(-6, 6)$和 $AP : PQ : QB = 3 : 3 : 2$，求 B、P 和 Q 的坐標。

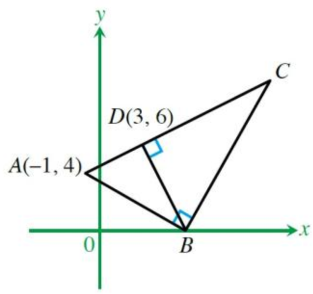
41. 圖中，連接 $A(7r, 4)$和 $B(r, -2)$的線段與 x 軸相交於 C。

(a) 求 $AC : CB$。
(b) 延長線段 AB 至 y 軸上的 D 點及設 $r = 1$。
  (i) 求 $DB : BC$。
  (ii) 求 $AC : CB : BD$。



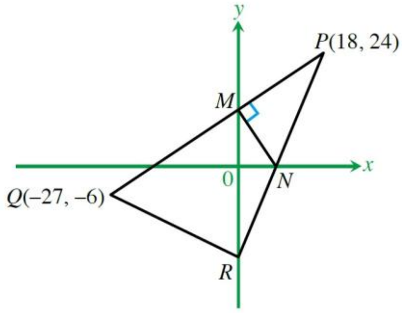
42. 圖中，△ABC 是一個直角三角形，其中∠B 是直角， 且 B 在 x 軸上。D 是 AC 的一點使 $BD \perp AC$。A 和 D 的坐標分別是$(-1, 4)$和$(3, 6)$。

(a) 求 B 的坐標。
(b) 求 C 的坐標。
(c) 求 $AD : DC$。

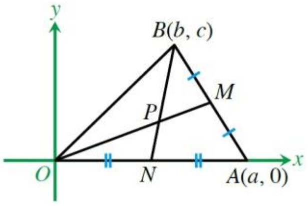


43. 圖中，連接 $P(18, 24)$ 和 $Q(-27, -6)$ 的線段與 y 軸相交於 M。N 是 x 軸上的一點，使 $MN \perp PQ$。延長線段 PN 至 y 軸上的 R 點。

(a) 求 M 和 N 的坐標。
(b) 求 $PN : NR$。



44. 圖中，△OAB 的頂點是 $A(a, 0)$、$B(b, c)$ 和 $O(0, 0)$。M 和 N 分別是 AB 和 OA 的中點。OM 與 BN 相交於 P。



(a) 設 P_1 和 P_2 分別為 BN 和 OM 上的點，使 $BP_1 : P_1N = OP_2 : P_2M = 2 : 1$。求 P_1 和 P_2 的坐標。
(b) 由此，證明 $OP : PM = BP : PN = 2 : 1$。

多項選擇題

45. 以下哪點離原點最遠？
A. $(-1, 7)$
B. $(2, 5)$
C. $(4, -6)$
D. $(0, 7)$

46. 一條直線分別與 x 軸和 y 軸相交於 $A(p, 0)$ 和 $B(0, -p)$，其中 p 是一個大於零的常數。求直線的斜率。
A. 1
B. -1
C. $2p$
D. $-2p$

47. 考慮 $A(3, 8)$ 和 $B(-2, -2)$ 兩點。C 是 y 軸上的一點，使 $AB \perp BC$。求 C 的坐標。
A. $(0, 3)$
B. $(0, 0)$
C. $(0, -1)$
D. $(0, -3)$

48. $M(4, -3)$ 是線段 AB 的中點。A 和 B 分別是 x 軸和 y 軸上的點。求 A 和 B 的坐標。
A. $A(8, 0)$，$B(0, -6)$
B. $A(0, 8)$，$B(-6, 0)$
C. $A(0, -6)$，$B(8, 0)$
D. $A(-6, 0)$，$B(0, 8)$

49. $P(5, -8)$、$Q(k, 4k)$ 和 $R(-10, 2)$ 共線。求 $PQ : QR$。
A. $3 : 2$
B. $2 : 3$
C. $k : 2$
D. $k : 3$

文憑試題型

1. 點 A 及點 B 的坐標分別為 (–4, –2) 及 (3, 5)。A 繞原點 O 逆時針方向旋轉 90° 至 A'。B 向左平移 10 單位至 B'。

(a) 寫出 A' 及 B' 的坐標。

(b) 證明 AB 垂直於 $A'B'$。

2. 點 P 及點 Q 的坐標分別為 (–1, –4) 及 (1, 4)。P 繞原點 O 逆時針方向旋轉 90° 至 P'。Q 向下平移 17 單位至 Q'。

(a) 寫出 P' 及 Q' 的坐標。

(b) 證明 PQ 平行於 $P'Q'$。

3. 點 C 及點 D 的坐標分別為 (3, 6) 及 (2, 5)。C 沿 y 軸反射至 C'。D 繞原點 O 順時針方向旋轉 90° 至 D'。

(a) 寫出 C' 及 D' 的坐標。

(b) 證明 CD 垂直於 $C'D'$。

文憑試 MC 題型(optional)

1. 設 O 為原點。若點 A 及點 B 的坐標分別為 (20, 0) 及 (20, 15)，則 △OAB 的外心的 x 坐標為

A. 7.5。

B. 10。

C. 15。

D. 20。

2. 設 O 為原點。若點 M 及點 N 的坐標分別為 (0, 18) 及 (–26, 18)，則 △OMN 的外心的 y 坐標為

A. –26。

B. –13。

C. 0。

D. 9。

3. 設 O 為原點。若點 P、點 Q 及點 R 的坐標分別為 (9, 36)、(41, 36) 及 (41, 11)，則 △PQR 的外心的 y 坐標為

A. 5.5。

B. 18。

C. 23.5。

D. 25。

4. 設 O 為原點。若點 A 及點 B 的坐標分別為 $(0, 29)$ 及 $(20, 10)$，則 $\triangle OAB$ 的垂心的 x 坐標為

A. 9.5。

B. 10。

C. 14.5。

D. 20。

5. 設 O 為原點。若點 P 及點 Q 的坐標分別為 $(44, 46)$ 及 $(67, 0)$，則 $\triangle OPQ$ 的垂心的 y 坐標為

A. 22。

B. 23。

C. 33.5。

D. 44。

6. 設 O 為原點。若點 F、點 G 及點 H 的坐標分別為 $(0, 50)$、$(60, 50)$ 及 $(40, 0)$，則 $\triangle FGH$ 的垂心的 y 坐標為

A. 16。

B. 27。

C. 34。

D. 50。

ANS:

1. (a) 10 單位 **(b)** 17 單位

(c) $\sqrt{34}$ 單位 **(d)** $\sqrt{65}$ 單位

2. (a) 2 **(b)** 5 **(c)** $\frac{3}{4}$ **(d)** $\frac{7}{6}$

4. (a) 26.6° **(b)** 45°

5. 2

6. (a) $\frac{5}{3}$ **(b)** $-\frac{1}{6}$

7. (a) $-\frac{2}{7}$ **(b)** $\frac{4}{3}$

10. (a) 7 **(b)** 2

11. (a) (4, 1) **(b)** (3, –1)

(c) (–3, –4) **(d)** (–7, 6)

12. (8, –9)

13. –18

14. (a) (6, 1) **(b)** (7, –2)

(c) (5, –7) **(d)** (–1, 5).

15. (–5, 5).

16. h = –7, k = 1

17. Yes

18. (a) OA = 20 單位, AB = 15 單位

(b) 150 平方單位

20. (2, 0).

21. (0, 5).

23. (a) $\sqrt{68}$ 單位

24. (a) 12 **(b)** 57.9 單位

25. (a) (0, 15) **(b)** 144 平方單位

26. (12, 0)

27. (a) (0, 8) **(b)** 114 平方單位

28. (a) 8 **(b)** 45°

29. (a) (1, –7)

30. (a) A (–10, 0), B (0, –5)

(b) 25 平方單位

31. (a) A(10, 0), B(0, –2)

(b) 26 平方單位

32. (a) 16 **(b)** 47.9 單位

33. (a) PQ = 5 單位, QR = 5 單位

RS = 5 單位, PS = 5 單位

34. (a) (6, 4).

(b) (i) $y = -4x - 6$ **(ii)** (–2, 2)

(iii) 68 平方單位

35. (a) (–1, 0)

36. p = 3, q = 5

37. a = 3, b = –2

38. (a) 2 : 1 **(b)** (14, 0)

39. (a) (2, –4) **(c)** 3 : 4

40. Q(0, –6), B(2, –10).

41. (a) 2 : 1 **(b) (i)** 1 : 2 **(ii)** 4 : 2 : 1

42. (a) (6, 0) **(b)** $(12, \frac{21}{2})$ **(c)** 4 : 9

43. (a) M(0, 12), N(8, 0)

(b) 5 : 4

44. (a) $P_1\left(\frac{a+b}{3}, \frac{c}{3}\right)$, $P_2\left(\frac{a+b}{3}, \frac{c}{3}\right)$.

45. C **46.** A **47.** D **48.** A **49.** B

文憑試題型:

1. **(a)** A'(2, –4), B'(–7, 5)

2. **(a)** P'(4, –1), Q'(1, –13)

3. **(a)** C'(–3, 6), D'(5, –2)

文憑試 MC 題型:

1. B 2. D 3. C 4. A 5. A 6. C

中三 三角學

Revision Notes:

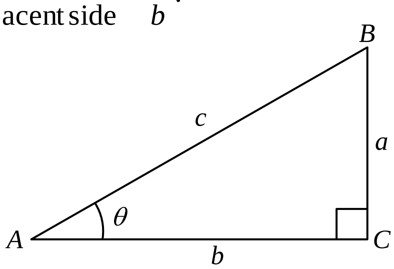
1. Trigonometric Ratios of Acute Angles 銳角的三角比

(a) Refer to the right-angled triangle *ABC* on the right. We have

$$\sin\theta = \frac{\text{opposite side}}{\text{hypotenuse}} = \frac{a}{c},\ \cos\theta = \frac{\text{adjacent side}}{\text{hypotenuse}} = \frac{b}{c},\ \tan\theta = \frac{\text{opposite side}}{\text{adjacent side}} = \frac{a}{b}.$$

參看右面的直角三角形 *ABC*，我們得到

$$\sin\theta = \frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}} = \frac{a}{c}\text{，}\cos\theta = \frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}} = \frac{b}{c}\text{，}\tan\theta = \frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}} = \frac{a}{b}\text{。}$$



(b) The following table shows the trigonometric ratios of some special angles.

下表顯示一些特殊角的三角比。

Trigonometric ratio \ θ	30°	45°	60°
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$ (or $\frac{\sqrt{2}}{2}$)	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$ (or $\frac{\sqrt{2}}{2}$)	$\frac{1}{2}$
$\tan\theta$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$ (or $\frac{\sqrt{3}}{3}$)	1	$\sqrt{3}$

2. Trigonometric Identities 三角恆等式

(a) $\tan\theta \equiv \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

(b) $\sin^2\theta + \cos^2\theta \equiv 1$ (or $\sin^2\theta \equiv 1 - \cos^2\theta$ or $\cos^2\theta \equiv 1 - \sin^2\theta$)

(c) $\sin(90° - \theta) \equiv \cos\theta$

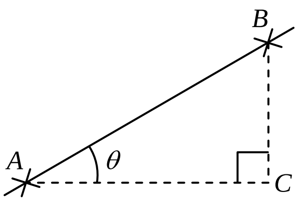
(d) $\cos(90° - \theta) \equiv \sin\theta$

(e) $\tan(90° - \theta) \equiv \dfrac{1}{\tan\theta}$

3. Gradient and Inclination 斜率和傾角

The figure shows an inclined plane *AB*. The ***gradient*** of $AB = \dfrac{BC}{AC} = \tan\theta$, where θ is called the ***inclination*** of *AB*.

If the gradient of *AB* is expressed in the form $\dfrac{1}{n}$ or 1 : *n*, then $n = \dfrac{1}{\tan\theta}$.



圖中所示為一個斜面 *AB*。

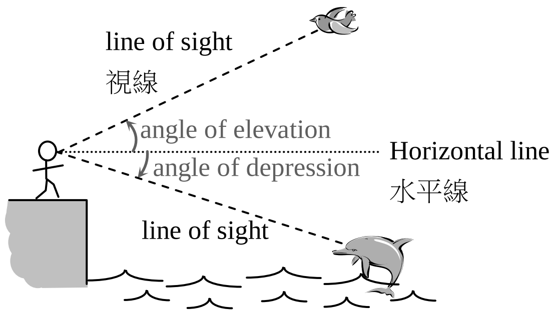
AB 的**斜率** $= \dfrac{BC}{AC} = \tan\theta$，其中 θ 稱為 *AB* 的**傾角**。

若 AB 的斜率以 $\frac{1}{n}$ 或 $1:n$ 的形式表示，則 $n=\frac{1}{\tan\theta}$ 。

4. Angle of Elevation and Angle of Depression 仰角和俯角

(a) When an observer looks at an object above him, the angle between the line of sight and the horizontal line is called the ***angle of elevation***.

當一個人觀察位於他上方的物件時，視線和水平線之間的夾角稱為**仰角**。



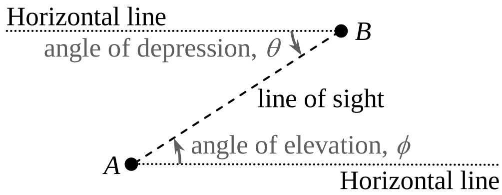
(b) When an observer looks at an object below him, the angle between the line of sight and the horizontal line is called the ***angle of depression***.

當一個人觀察位於他下方的物件時，視線和水平線之間的夾角稱為**俯角**。

(c) Refer to the following figure. The angle of elevation of B from A is equal to the angle of depression of A from B.

參看下圖。由 A 測得 B 的仰角等於由 B 測得 A 的俯角。

i.e. $\theta=\phi$



5. Bearings 方位角

(a) ***Compass bearing*** and ***true bearing*** are two methods of indicating the direction of an object relative to another object.

我們可利用**羅盤方位角**和**真方位角**這兩種方法表示一個物件相對於另一個物件的方位。

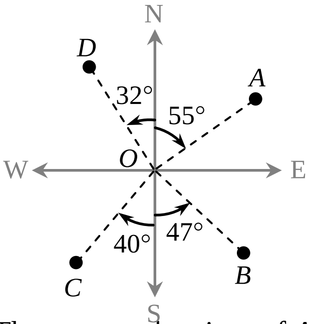
(b) In compass bearing, directions are measured from the north (N) or the south (S) in the form NθE, NθW, SθE and SθW, where $0° < \theta < 90°$.

使用羅盤方位角時，方向由正北或正南開始量度，並以 NθE、NθW、SθE 和 SθW 的形式表示，其中 $0° < \theta < 90°$。

(c) In true bearing, directions are measured from the north in a clockwise direction in a 3-digit form.

使用真方位角時，方向由正北開始按順時針方向量度，並以三位數表示所量得的角度。

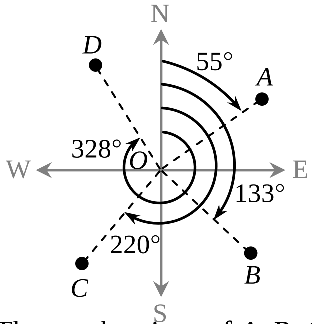
e.g. **(i)**



The compass bearings of *A*, *B*, *C* and *D* from *O* are N55°E, S47°E, S40°W and N32°W respectively.

由 *O* 測得 *A*、*B*、*C* 和 *D* 的羅盤方位角分別是 N55°E、S47°E、S40°W 和 N32°W。

(ii)

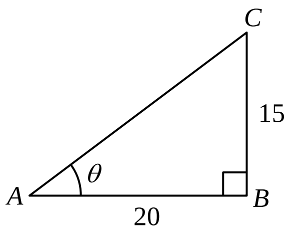


The true bearings of *A*, *B*, *C* and *D* from *O* are 055°, 133°, 220° and 328° respectively.

由 *O* 測得 *A*、*B*、*C* 和 *D* 的真方位角分別是 055°、133°、220° 和 328°。

Worked examples:

Eg. 3.1 In the figure, find the values of $\sin\theta$, $\cos\theta$ and $\tan\theta$.
(*Express the answers in fractions.*)（答案以分數表示。）



Solution By Pythagoras' theorem,
利用畢氏定理，

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$$
$$= \sqrt{20^2 + 15^2}$$
$$= 25$$

$$\sin\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{15}{25} = \underline{\underline{\frac{3}{5}}}$$

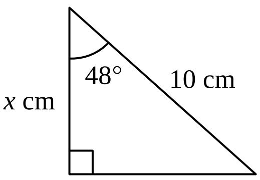
$$\cos\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{20}{25} = \underline{\underline{\frac{4}{5}}}$$

$$\tan\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{15}{20} = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$$

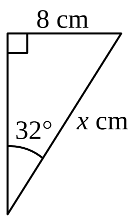
$$\sin\theta = \frac{\text{opposite side}}{\text{hypotenuse}},$$
$$\cos\theta = \frac{\text{adjacent side}}{\text{hypotenuse}},$$
$$\tan\theta = \frac{\text{opposite side}}{\text{adjacent side}}.$$

Eg. 3.2 In each of the following, find *x*. (*Give the answers correct to 3 significant figures.*)

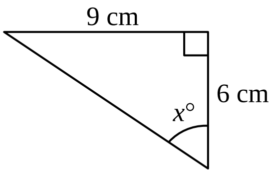
(a)



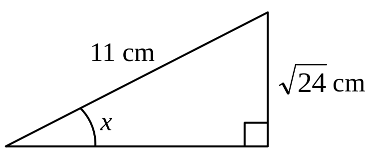
(b)



(c)



(d)



Solution

(a) $\cos 48° = \dfrac{x}{10}$

$x = 10 \cos 48°$

$= \underline{\underline{6.69}}$, *cor. to 3 sig. fig.*

10 cos 48 EXE
The keying sequences (按鍵次序) here are for calculators of model fx-3650P. Students using other models should refer to the manuals of their own calculators if necessary.

(b) $\sin 32° = \dfrac{8}{x}$

$x = \dfrac{8}{\sin 32°}$

$= \underline{\underline{15.1}}$, *cor. to 3 sig. fig.*

8 ÷ sin 32 EXE

(c) $\tan x° = \dfrac{9}{6}$

$x = \underline{\underline{56.3}}$, *cor. to 3 sig. fig.*

9 ÷ 6 EXE SHIFT tan ($\tan^{-1}$) Ans EXE

(d) $\sin x = \dfrac{\sqrt{24}}{11}$

$x = \underline{\underline{26.4°}}$, *cor. to 3 sig. fig.*

√ 24 ÷ 11 EXE SHIFT sin ($\sin^{-1}$) Ans EXE
Don't omit the unit of x.
不要漏寫 x 的單位。

Eg. 3.3

Without using a calculator, find the value of each of the following expressions.
試不用計算機求下列各式的值。

(a) $2 \sin 60° \tan 30°$ **(b)** $\dfrac{\cos 45°}{\tan 45° - \sin 30°}$

(c) $(\tan^2 60° - 1) \cos^2 30°$ **(d)** $\cos 55° \sin 35° + \cos^2 35°$

Solution

(a) $2 \sin 60° \tan 30° = 2 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$= \underline{\underline{1}}$

sin 60° tan 30° means sin 60° × tan 30°.

(b) $\dfrac{\cos 45°}{\tan 45° - \sin 30°} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{1}{2}}$

$= \dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}}$

$\dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \dfrac{2}{1}$

$= \underline{\underline{\dfrac{2}{\sqrt{2}}}}$ (or $\sqrt{2}$)

NF $\dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} \times \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

(c) $(\tan^2 60° - 1) \cos^2 30° = \left[(\sqrt{3})^2 - 1\right]\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$= (3 - 1)\dfrac{3}{4}$

$= (2)\dfrac{3}{4}$

$= \underline{\underline{\dfrac{3}{2}}}$

$\cos^2 30°$ means $\cos 30° \times \cos 30°$.

(d) $\cos 55° \sin 35° + \cos^2 35°$

$= \sin(90° - 55°) \sin 35° + \cos^2 35°$ ⊂ $\cos\theta = \sin(90° - \theta)$

$= \sin 35° \sin 35° + \cos^2 35°$

$= \sin^2 35° + \cos^2 35°$ ⊂ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$= \underline{\underline{1}}$

Eg. 3.4 Without using a calculator, find the measure of θ in each of the following, where $0° \le \theta < 90°$.
試不用計算機求下列各題中 θ 的大小，其中 $0° \le \theta < 90°$。

(a) $2\sin\theta = \tan 60°$ **(b)** $\tan 2\theta = \dfrac{1}{2\cos 30°}$

Solution **(a)** $2\sin\theta = \tan 60°$

$2\sin\theta = \sqrt{3}$ ⊂ $\tan 60° = \sqrt{3}$

$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\theta = \underline{\underline{60°}}$ ⊂ $\sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(b) $\tan 2\theta = \dfrac{1}{2\cos 30°}$

$\tan 2\theta = \dfrac{1}{2 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}}$ ⊂ $\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 2\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$2\theta = 30°$ ⊂ $\tan 30° = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\theta = \underline{\underline{15°}}$

Eg. 3.5 Simplify each of the following expressions. 簡化下列各式。

(a) $\dfrac{\cos(90° - \theta)}{\tan\theta}$

(b) $\sin(90° - \theta)\tan(90° - \theta) + \sin\theta$

Solution **(a)** $\dfrac{\cos(90° - \theta)}{\tan\theta} = \dfrac{\sin\theta}{\tan\theta}$ ⊂ $\cos(90° - \theta) = \sin\theta$

$= \dfrac{\sin\theta}{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}$ ⊂ $\dfrac{\sin\theta}{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \sin\theta \times \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$= \underline{\underline{\cos\theta}}$

(b) $\sin(90° - \theta)\tan(90° - \theta) + \sin\theta = \cos\theta \times \dfrac{1}{\tan\theta} + \sin\theta$ ⊂ $\sin(90° - \theta) = \cos\theta$, $\tan(90° - \theta) = \dfrac{1}{\tan\theta}$

$= \cos\theta \times \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} + \sin\theta$ ⊂ $\dfrac{1}{\tan\theta} = \dfrac{1}{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$= \dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta} + \sin\theta$

$= \dfrac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\sin\theta}$ ⊂ $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$= \underline{\underline{\dfrac{1}{\sin\theta}}}$

Eg. 3.6 Prove each of the following identities. 證明下列各恆等式。

(a) $\dfrac{\cos\theta}{\tan(90° - \theta)} \equiv \sin\theta$

(b) $\tan^2\theta(1 + \sin\theta)(1 - \sin\theta) \equiv \sin^2\theta$

Solution

(a) L.H.S. $= \dfrac{\cos\theta}{\tan(90° - \theta)}$

$= \dfrac{\cos\theta}{\dfrac{1}{\tan\theta}}$

$= \cos\theta\tan\theta$

$= \cos\theta \times \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$= \sin\theta$

R.H.S. $= \sin\theta$

$\because$ L.H.S. = R.H.S.

$\therefore \dfrac{\cos\theta}{\tan(90° - \theta)} \equiv \sin\theta$

➲ $\tan(90° - \theta) = \dfrac{1}{\tan\theta}$

➲ $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

(b) L.H.S. $= \tan^2\theta(1 + \sin\theta)(1 - \sin\theta)$

$= \tan^2\theta(1 - \sin^2\theta)$

$= \tan^2\theta\cos^2\theta$

$= \dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} \times \cos^2\theta$

$= \sin^2\theta$

R.H.S. $= \sin^2\theta$

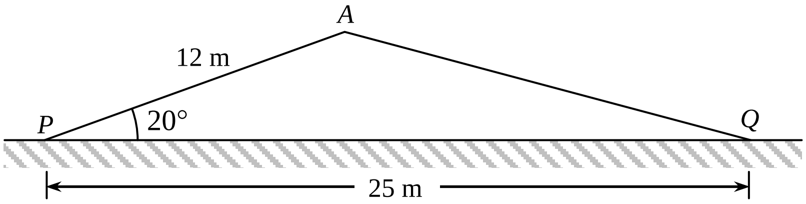
$\because$ L.H.S. = R.H.S.

$\therefore \tan^2\theta(1 + \sin\theta)(1 - \sin\theta) \equiv \sin^2\theta$

➲ Use the identity $(a + b)(a - b) \equiv a^2 - b^2$.

➲ $1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$

Eg. 3.7 In the figure, *AP* and *AQ* represent two straight inclined roads. It is given that $\angle APQ = 20°$, *AP* = 12 m and *PQ* = 25 m.
圖中，*AP* 和 *AQ* 代表兩條筆直的斜路。已知$\angle APQ = 20°$，*AP* = 12 m 和 *PQ* = 25 m。



(a) Find the gradient of road *AP*. Express the answer in decimal. 求道路 *AP* 的斜率，答案以小數表示。

(b) Find the inclination of road *AQ*. 求道路 *AQ* 的傾角。

(*Give the answers correct to 3 significant figures.*)

Solution

(a) Gradient of road *AP* = tan 20°

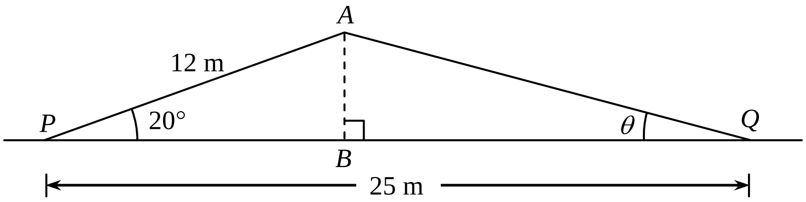
= <u>0.364</u>, *cor. to 3 sig. fig.*

➲ The gradient of road *AP* can be expressed in the form $1 : \dfrac{1}{\tan 20°}$ or 1 : 2.75 (where 2.75 is correct to 3 significant figures).

(b) Refer to the following figure. Draw a perpendicular line from A to meet PQ at B. Let the inclination of road AQ be θ.

參看下圖，繪畫一條由 A 至 PQ 的垂線，這垂線與 PQ 相交於 B。

設道路 AQ 的傾角是 θ。



In $\triangle APB$,

$$\sin 20° = \frac{AB}{12\text{ m}}$$

$$AB = 12\sin 20°\text{ m}$$

$$\cos 20° = \frac{PB}{12\text{ m}}$$

$$PB = 12\cos 20°\text{ m}$$

$QB = PQ - PB = (25 - 12\cos 20°)$ m

In $\triangle AQB$,

$$\tan\theta = \frac{AB}{QB} = \frac{12\sin 20°}{25 - 12\cos 20°}$$

$\therefore\ \ \theta = 16.6°$, *cor. to 3 sig. fig.*

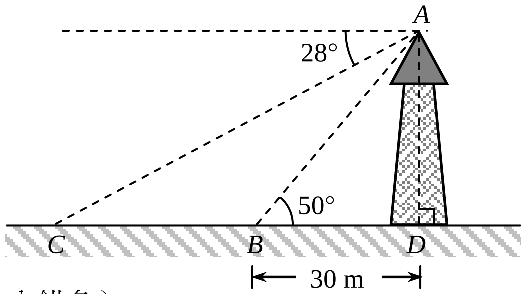
$\therefore$ The inclination of road AQ is $16.6°$.

12 sin 20 ÷ (25 − 12 cos 20) EXE SHIFT tan ($\tan^{-1}$) Ans EXE

Eg. 3.8 In the figure, B and C are points on the horizontal ground. The angle of elevation of the top A of a tower from point B is 50°. The angle of depression of point C from A is 28°. The distance between B and the bottom D of the tower is 30 m. B, C and D lie on a straight line. Find the distance between B and C.

圖中，B 點和 C 點位於同一個水平地面上。由 B 點測得一座塔的頂部 A 的仰角是 50°，由 A 測得 C 點的俯角是 28°。B 與塔的底部 D 的距離是 30 m。B、C 和 D 位於同一條直線上。求 B 和 C 的距離。

(*Give the answer correct to 3 significant figures.*)



Solution

$\angle ACD = 28°$ (*alt.* $\angle$*s*, *parallel lines*)（平行線的內錯角）

In $\triangle ABD$,

$$\tan 50° = \frac{AD}{30\text{ m}}$$

$$AD = 30\tan 50°\text{ m}$$

In $\triangle ACD$,

$$\tan\angle ACD = \frac{AD}{CD}$$

$$\tan\angle ACD = \frac{AD}{BC + BD}$$

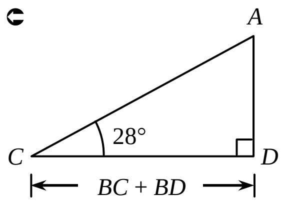
$$BC + BD = \frac{AD}{\tan\angle ACD}$$

$$BC = \frac{AD}{\tan\angle ACD} - BD$$

$$= \left(\frac{30\tan 50°}{\tan 28°} - 30\right)\text{ m}$$

$$= 37.2\text{ m}, \textit{cor. to 3 sig. fig.}$$

$\therefore$ The distance between B and C is 37.2 m.



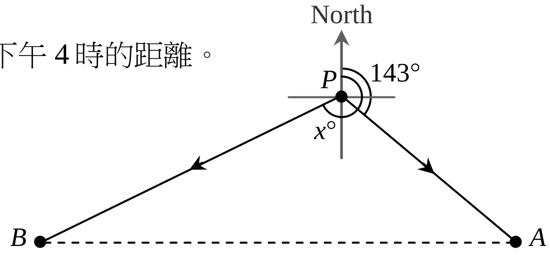
30 tan 50 ÷ tan 28 − 30 EXE

Eg. 3.9 Ships A and B left a pier P at 1 pm. Ship A travelled at a speed of 20 km/h in the direction 143°. Ship B travelled at a speed of 35 km/h in the direction x°, where $180 < x < 270$. If ship A was due east of ship B at 4 pm on the same day, find
船 A 和船 B 在下午 1 時離開碼頭 P。船 A 沿 143° 的方向以速率 20 km/h 航行，船 B 沿 x° 的方向以速率 35 km/h 航行，其中 $180 < x < 270$。若船 A 在同日下午 4 時位於船 B 的正東方，求

(a) x,

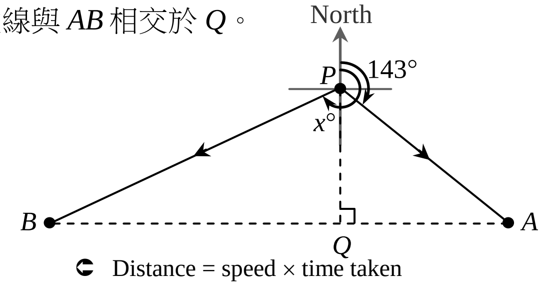
(b) the distance between the two ships at 4 pm. 兩船在下午 4 時的距離。

(*Give the answers correct to 3 significant figures.*)



Solution

(a) Refer to the following figure. Draw a perpendicular line from P to meet AB at Q.
參看下圖，繪畫一條由 P 至 AB 的垂線，這垂線與 AB 相交於 Q。



$\angle APQ = 180° - 143° = 37°$

PA = distance travelled by ship A in 3 hours
船 A 在 3 小時內所航行的距離
$= 20 \times 3$ km
$= 60$ km

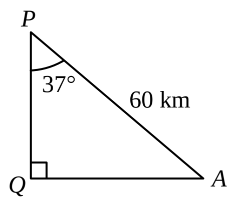
Distance = speed × time taken
距離＝速率×時間

PB = distance travelled by ship B in 3 hours
$= 35 \times 3$ km
$= 105$ km

In $\triangle APQ$,

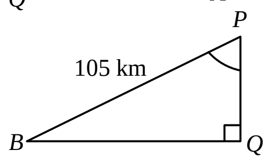
$$\cos\angle APQ = \frac{PQ}{PA}$$

$$PQ = PA\cos\angle APQ = 60\cos 37° \text{ km}$$



In $\triangle BPQ$,

$$\cos\angle BPQ = \frac{PQ}{PB} = \frac{60\cos 37°}{105}$$



$\therefore\ \angle BPQ = 62.847°$, *cor. to 5 sig. fig.*

$\therefore\ x = 180° + \angle BPQ$
$= 180° + 62.847°$
$= \underline{\underline{243°}}$, *cor. to 3 sig. fig.*

To reduce the error (誤差) due to rounding off (四捨五入), 62.847 (correct to 5 significant figures) is used instead of 62.8 (correct to 3 significant figures).

(b) In $\triangle APQ$,

$$\sin\angle APQ = \frac{QA}{PA}$$

$$QA = PA\sin\angle APQ = 60\sin 37° \text{ km}$$

In $\triangle BPQ$,

$$\sin\angle BPQ = \frac{QB}{PB}$$

$$QB = PB\sin\angle BPQ = 105\sin 62.847° \text{ km}$$

$\therefore$ The required distance $= QB + QA$
$= (105\sin 62.847° + 60\sin 37°)$ km
$= \underline{\underline{130\text{ km}}}$, *cor. to 3 sig. fig.*

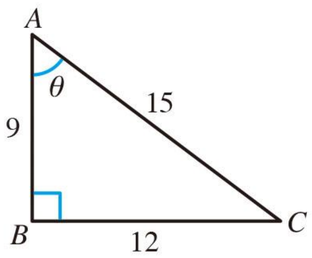
If we use $\angle BPQ = 62.8°$ to find the required distance, we will only get 129 km.

練習

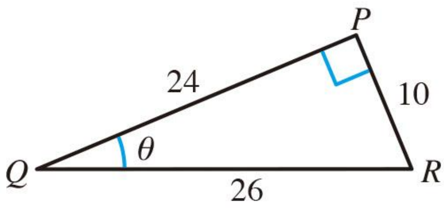
Part 1 三角比

在下列各直角三角形中，求 sin θ、cos θ和 tan θ的值。 **(1 – 2)**

1.

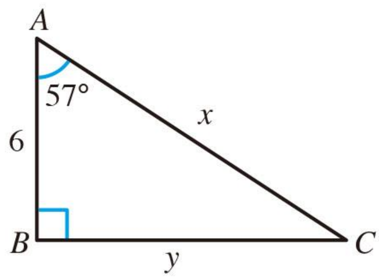


2.

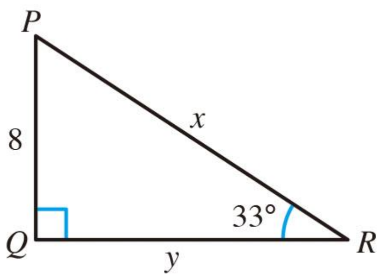


求下列各直角三角形中的未知量。 **(3 – 10)**

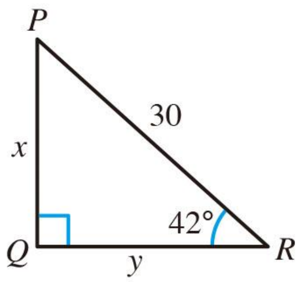
3.



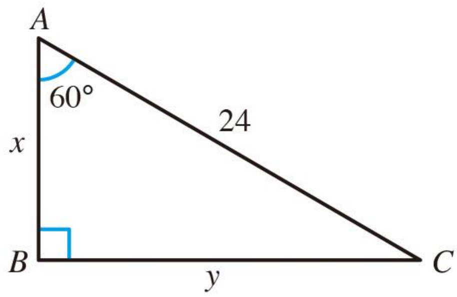
4.



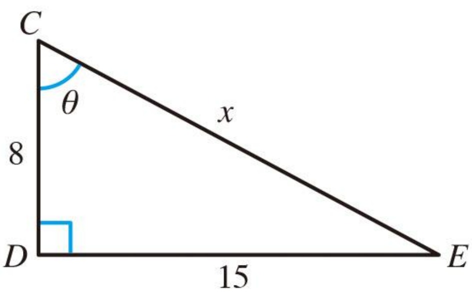
5.



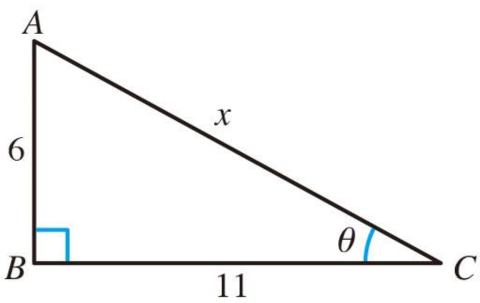
6.



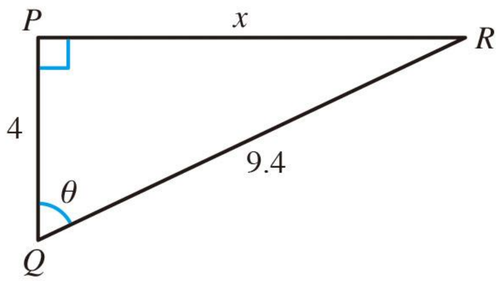
7.



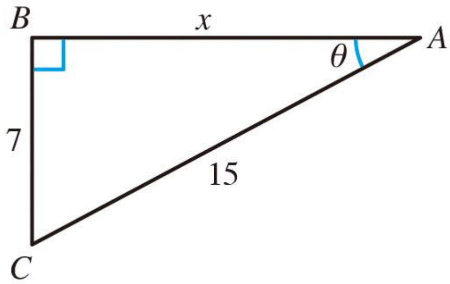
8.



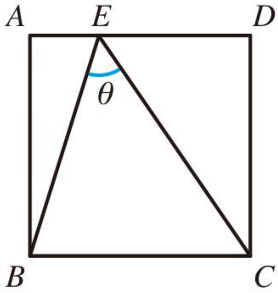
9.



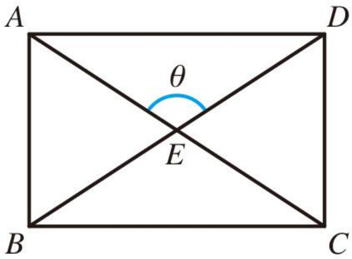
10.



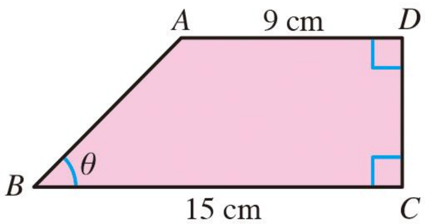
11. 圖中，$ABCD$ 是一個正方形，且 AED 是一條直線。若 $AE = 5$ 和 $AB = 16$，求 θ。



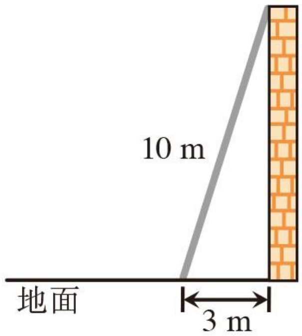
12. 圖中，$ABCD$ 是一個長方形。對角線 AC 和 BD 相交於 E。若 $BC = 20$ 和 $CD = 13$，求 θ。



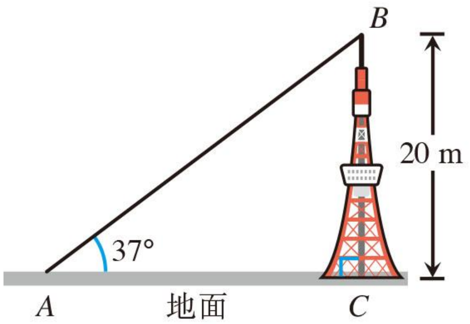
13. 圖中，若梯形 $ABCD$ 的面積是 72 cm^2，求 θ。



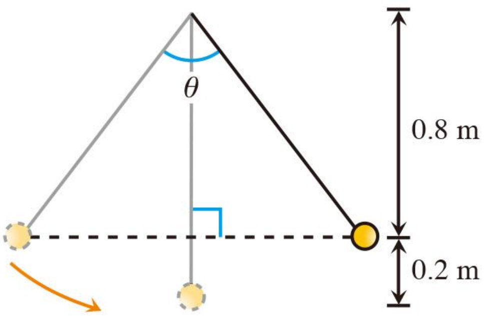
14. 圖中，一條長 10 m 的梯子倚在一堵直立牆壁上。梯子的底部與牆壁相距 3 m。求梯子與水平地面所成的角。



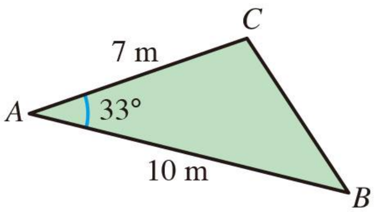
15. 圖中，BC 是一座高 20 m 的直立的塔。A 和 C 位於同一水平地面上。已知 $\angle BAC = 37°$。求 A 與 C 之間的距離。



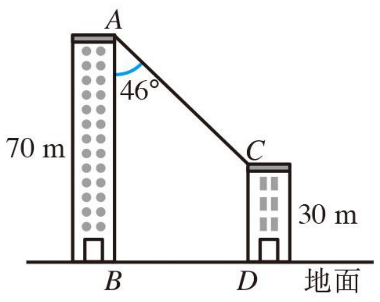
16. 一根棒的末端有一個鐵球。該鐵球在一個平面中來回擺動。圖中所示為鐵球的不同位置。求 θ。



17. 圖中所示為一個三角形公園 ABC。求公園的面積。



18. 圖中，AB 和 CD 是兩座分別高 70 m 和 30 m 的直立建築物。B 和 D 位於同一水平地面上。已知 $\angle BAC = 46°$，求兩座建築物之間的距離。



使用計算機求下列各 θ。(**19 – 20**)

19. $4 \tan \theta = 7 + \sin 38°$

20. $\tan \theta - 3 \cos 55° = 0$

21. **(a)** 求 $\tan 17°$ 的值。

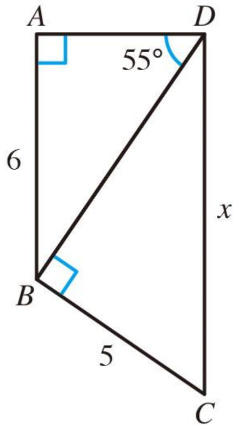
(b) 若 $\cos \theta = \tan 17°$，求 θ。

22. **(a)** 求 $\cos 46°$ 的值。

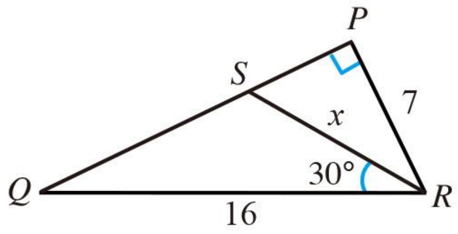
(b) 若 $2 \sin \theta - \cos 46° = 0$，求 θ。

求下列各圖中的未知量。 **(23 – 26)**

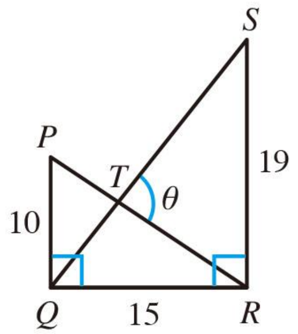
23.



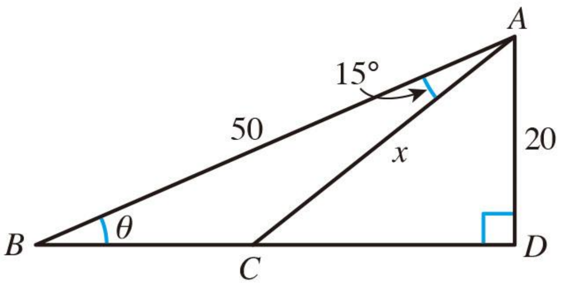
24. *PSQ* 是一條直線。



25.

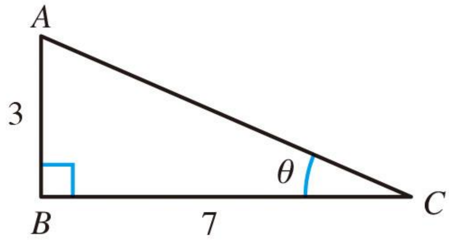


26.



Part 2 三角比的關係

1. 圖中顯示 △*ABC*。∠*B* = 90°，*BC* = 7 和 *AB* = 3。利用畢氏定理求 sin θ、cos θ 和 tan θ 的值。



2. 已知 tan $\theta = \frac{4}{9}$。利用畢氏定理，求 sin θ 和 cos θ 的值。

3. 已知 sin $\theta = \frac{5}{13}$。利用畢氏定理，求 cos θ 和 tan θ 的值。

4. 已知 cos θ = 0.125。利用畢氏定理，求 sin θ 和 tan θ 的值。

求下列各題的值。(**5 – 8**)

5. $(\sin 60° \cos 45°)^2$

6. $\frac{\cos 30°}{\sin 60°} + \sin^2 45°$

7. $\tan^2 45° + \cos^2 60°$

8. $\frac{\cos 60° \tan 30°}{\sin 30° \tan 60°}$

下列各題中，求 θ 的值。 **(9 – 12)**

9. $2\sin\theta = \sqrt{2}$

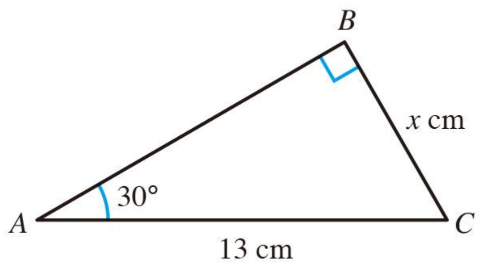
10. $2\cos\theta = 1$

11. $\sqrt{3}\tan\theta = 2\cos 60°$

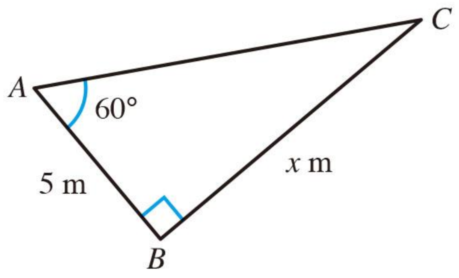
12. $\tan\theta = 2\sin^2 45°$

求下列各圖中的未知量。 **(13 – 14)**

13.



14.



化簡下列各題。 **(15 – 18)**

15. $\sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot\tan\theta$

16. $\dfrac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta}\cdot\dfrac{1-\cos^2\theta}{\sin\theta}$

17. $\dfrac{1}{\sin^2(90°-\theta)}-1$

18. $1 - \sin\theta\cos\theta\tan(90° - \theta)$

19. 試以 $\cos\theta$ 表示 $\cos^4\theta + \sin^2\theta\cos^2\theta$。

20. 試以 $\tan\theta$ 表示 $(1-\cos^2\theta)\left(1+\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right)$。

計算下列各題。 **(21 – 24)**

21. $\dfrac{\cos^2 20°+\cos^2 70°}{\sin^2 42°+\cos^2 42°}$

22. $\cos^2 11° - \sin^2 79°$

23. $\tan 36°\sin^2 54° - \cos 54°\cos 36°$

24. $\tan 25°\sin 65°\sin 25° + \cos^2 25°$

25. 已知 $\cos\theta = \dfrac{2}{7}$。求 $7\cos(90° - \theta)\tan(90° - \theta)$。

26. 已知 $\tan\theta = \dfrac{5}{6}$。求 $3\tan\theta - \tan(90° - \theta)$。

下列各題中，求 θ 的值。 **(27 – 28)**

27. $\cos 66° = \sin\theta$

28. $\tan 36° = \dfrac{1}{\tan(90°-\theta)}$

證明下列各恆等式。 **(29 – 32)**

29. $\cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$

30. $\sin x\left(\dfrac{1}{\tan x} - \dfrac{1}{\sin x}\right) = \cos x - 1$

31. $(\sin x - 1)\left[\tan x + \dfrac{1}{\sin(90^\circ - x)}\right] = -\cos x$

32. $\dfrac{1}{1-\sin x} - \dfrac{1}{1+\sin x} = \dfrac{2\tan x}{\cos x}$

33. 已知 $\tan\theta = \dfrac{3}{\sqrt{6}}$ 。利用畢氏定理，求 $\cos^2\theta\sin\theta$ 的值。

34. 已知 $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{12}}{5}$ 。利用畢氏定理，求 $\dfrac{2\tan\theta}{\cos\theta}$ 的值。

下列各題中，求 θ 的值。 **(35 – 40)**

35. $\dfrac{2\cos\theta}{\tan 60^\circ} - \tan 45^\circ = 0$

36. $2\cos(\theta + 45^\circ) - 1 = 0$

37. $\tan(50^\circ - \theta) - 1 = 0$

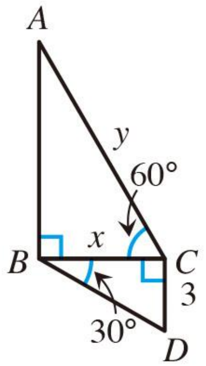
38. $\cos\theta - \sin\theta = 0$

39. $\sqrt{3}\sin\theta = \cos\theta$

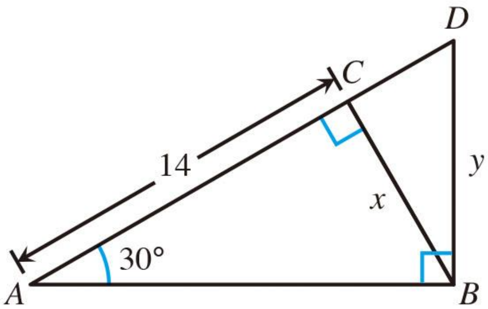
40. $\sin 30^\circ\cos\theta - \cos 30^\circ\sin\theta = 0$

求下列各圖中的未知量。 **(41 – 42)**

41.



42. ACD 是一條直線。



化簡下列各題。 **(43 – 44)**

43. $\dfrac{\cos^2(90^\circ - \theta)}{\sin^2(90^\circ - \theta)} \cdot \dfrac{1}{\tan\theta}$

44. $\dfrac{\sin(90^\circ - \theta)}{\tan(90^\circ - \theta)} - \cos(90^\circ - \theta)$

45. 試以 $\tan\theta$ 表示 $\dfrac{4}{\tan(90^\circ - \theta)} - \dfrac{2\cos(90^\circ - \theta)}{\cos\theta}$ 。

46. 試以 $\cos\theta$ 表示 $\dfrac{\sin^3\theta + \cos^3\theta\tan\theta}{\sin\theta\cos\theta}$ 。

47. 已知 $\sin(90° - \theta) = \dfrac{1}{5}$。求 $\dfrac{4\tan\theta}{\sin\theta\cos\theta}$ 的值。

48. 已知 $\tan\alpha = \dfrac{3}{4}$ 和 $\sin\beta = \dfrac{2}{5}$。求 $\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ 的值。

證明下列各恆等式。 **(49 – 52)**

49. $\sin\theta + \cos\theta + \tan\theta\sin\theta = \dfrac{1}{\cos\theta} + \cos\theta\tan\theta$

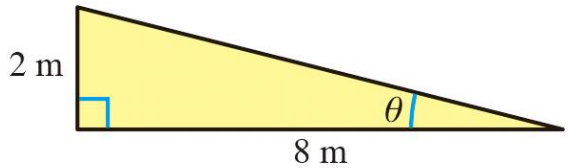
50. $\dfrac{1}{\cos(90° - \theta)} - \sin\theta = \dfrac{\sin(90° - \theta)}{\tan\theta}$

51. $\dfrac{\tan(90° - x) + 1}{\tan(90° - x) - 1} = \dfrac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$

52. $\dfrac{\cos x}{1 - \sin x} = \dfrac{1 + \sin x}{\cos x}$

Part 3 三角學的應用

1. 圖中顯示一個水平距離為 8 m 和鉛垂距離為 2 m 的山坡。



(a) 求山坡的斜率，答案以分數表示。

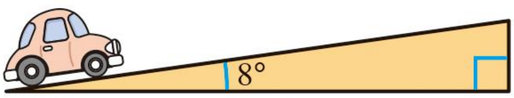
(b) 求山坡的傾角。

2. 某條直路的斜率是 3 比 13。

(a) 直路的傾角是多少？

(b) 若直路的水平距離是 50 m，直路的長度是多少？

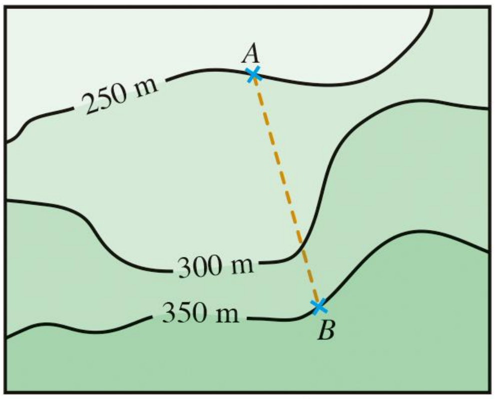
3. 圖中，斜路的傾角是 8°。



(a) 當一輛汽車所行駛的水平距離是 2000 m 時，求它上升了的高度。

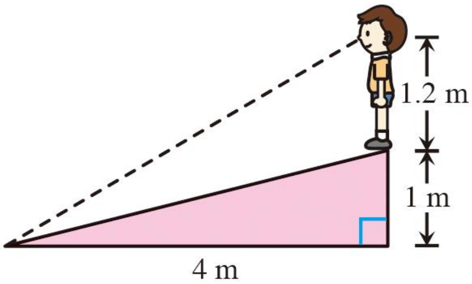
(b) 當汽車上升了 150 m 時，求它沿着斜路所行駛的距離。

4. 圖中，AB 是一條直路，它在地圖上量得的長度是 2.5 cm。若地圖的比例尺是 1：20 000，求直路 AB 的斜率（以分數表示）和傾角。

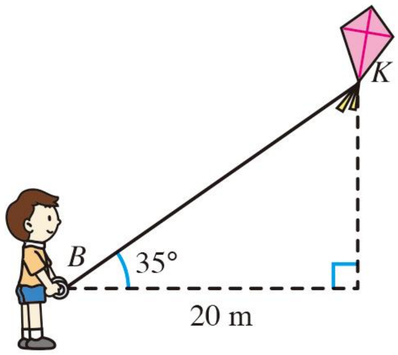


比例尺 1 : 20 000

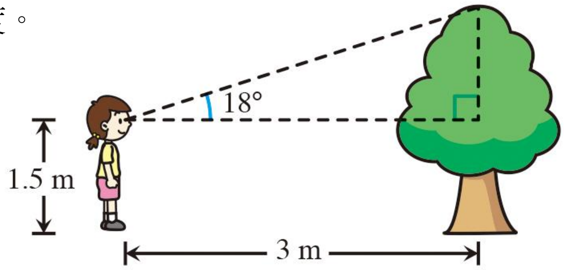
5. 圖中，<u>皓德</u>站在一個斜台的頂部。若他的眼睛離斜台的頂部 1.2 m，求由<u>皓德</u>測得斜台底部的俯角。



6. 圖中，一名男孩在放風箏。他與風箏的水平距離是 20 m。若由男孩（B）測得風箏（K）的仰角是 35°，求繩子的長度。
（假設繩子是拉緊的。）



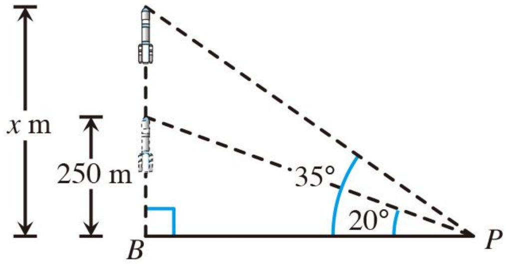
7. 圖中，<u>詩雅</u>望向大樹的頂部。該大樹與<u>詩雅</u>相距 3 m。她的眼睛離水平地面 1.5 m，由她測得大樹頂部的仰角是 18°。求大樹的高度。



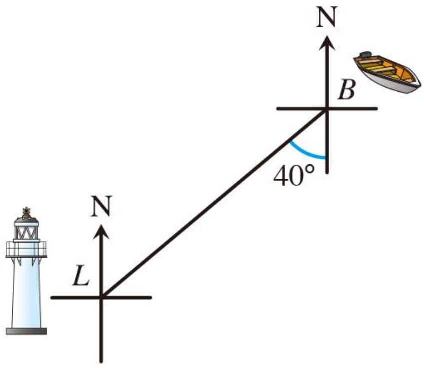
8. 圖中，火箭從發射台 B 鉛垂向上發射。當它離水平地面 250 m 時，由地面上的 P 點測得火箭的仰角是 20°。當火箭離地面 x m 時，由 P 測得的仰角是 35°。

(a) 求 P 與 B 之間的距離。

(b) 求 x 的值。

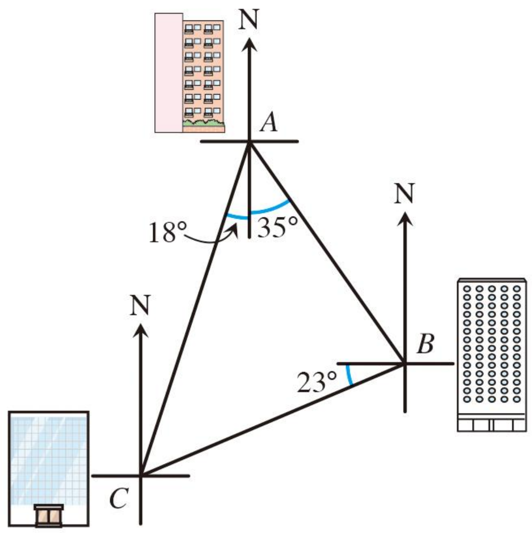


9. 圖中，由船 B 測得燈塔 L 的方位是 S40°W。求由燈塔測得該船的羅盤方位角。



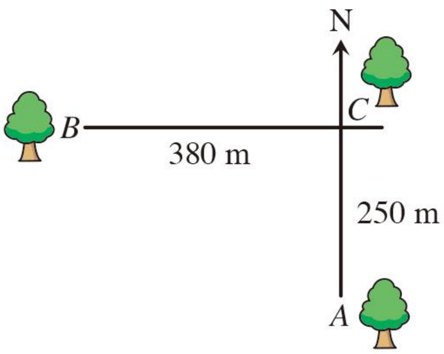
10. 右圖顯示三幢大廈 A、B 和 C 的位置。A、B 和 C 位於同一個水平地面上。

(a) 求由 B 測得 A 的真方位角。
(b) 求由 A 測得 C 的真方位角。
(c) 求由 C 測得 B 的真方位角。



11. 圖中，三棵大樹 A、B 和 C 位於同一個水平地面上。A 位於 C 的正南方 250 m 處，而 B 位於 C 的正西方 380 m 處。

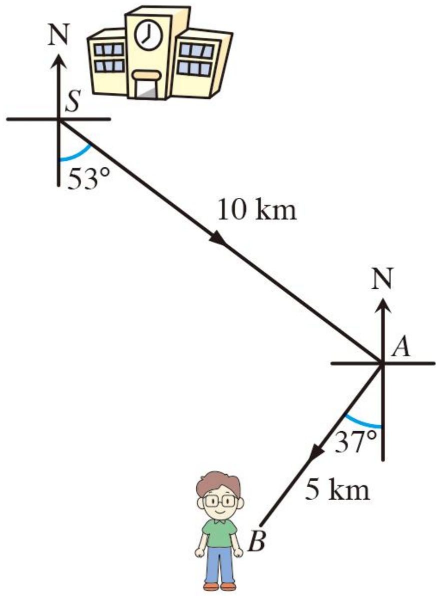
(a) 求由 A 測得 B 的真方位角。
(b) 求由 B 測得 A 的真方位角。



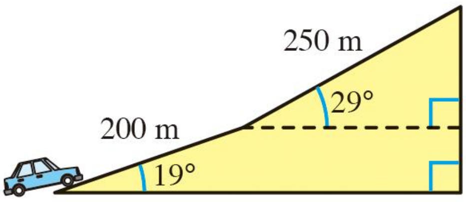
12. 圖中，一名學生離開他的學校（S），並沿 S53°E 的方向步行 10 km 至 A，然後沿 S37°W 的方向步行 5 km 至 B。

(a) S 與 B 之間的距離是多少？

(b) 由 S 測得 B 的羅盤方位角是多少？



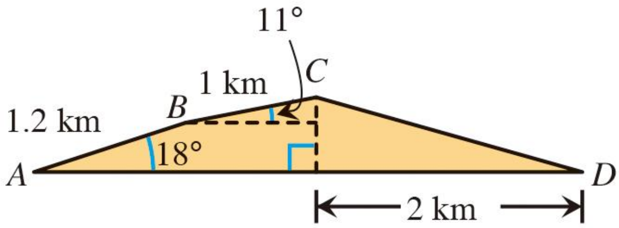
13. 圖中，一輛汽車沿着一段傾角為 19° 的山路向上行駛了 200 m，然後沿着另一段傾角為 29° 的山路再向上行駛了 250 m。汽車所行駛的水平距離和鉛垂距離是多少？



14. 圖中，<u>燕玲</u>由 A 經 B 步行到達山坡的頂部 C。AB 和 BC 的傾角分別是 18° 和 11°。AB 的長度是 1.2 km，而 BC 的長度是 1 km。後來她向下步行至 D，而 D 和 A 位於同一水平線上。C 與 D 的水平距離是 2 km。

(a) 求 A 與 C 的鉛垂距離，答案以 m 為單位。

(b) 求 CD 的傾角。

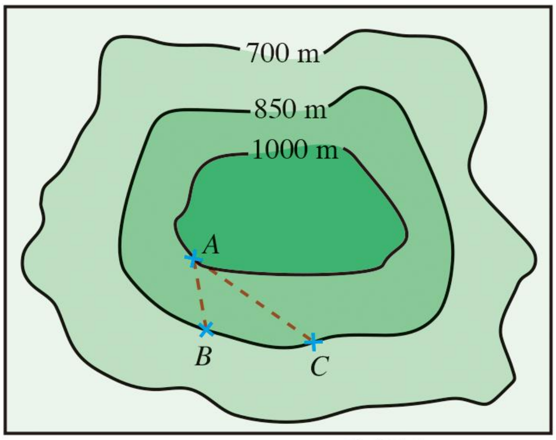


15. 圖中，等高線地圖的比例尺是 1 : 50 000。AB 和 AC 是兩條直路。在地圖上，AB 和 AC 的長度分別量度得 0.8 cm 和 1.6 cm。

(a) 求 AB 和 AC 的傾角。

(b) 直路 AB 和直路 AC 哪條較傾斜？
試解釋你的答案。

(c) 求較傾斜的直路的真實長度。

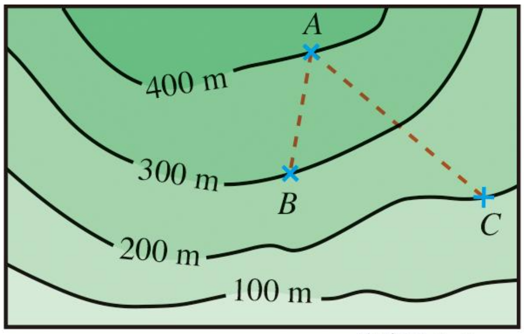


比例尺 1 : 50 000

16. 圖中，等高線地圖的比例尺是 1 : n。在地圖上，兩條直路 AB 和 AC 的長度分別量得 1.2 cm 和 2.2 cm。已知直路 AB 的傾角是 25°。

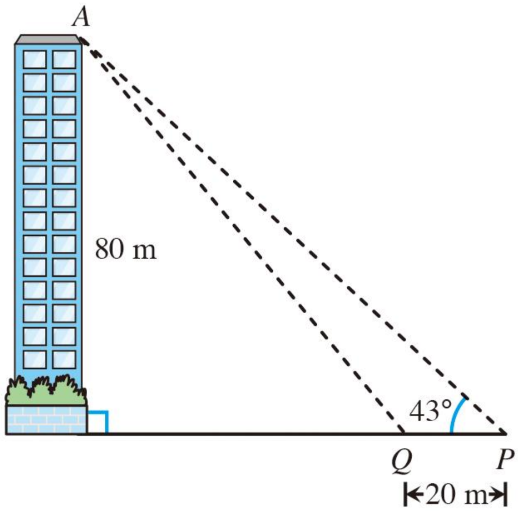
(a) 求 n 的值，準確至最接近的千位。

(b) 利用 **(a)** 部的結果，求 AC 的傾角。

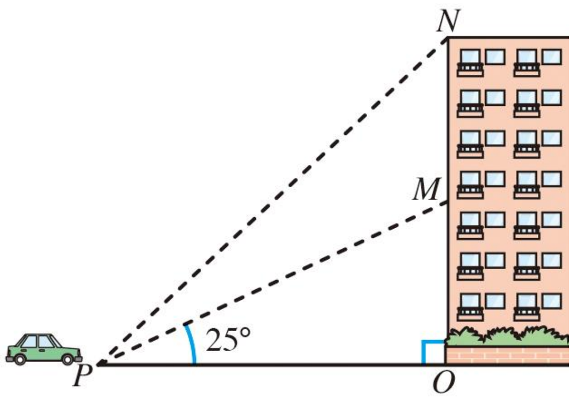


比例尺 1 : n

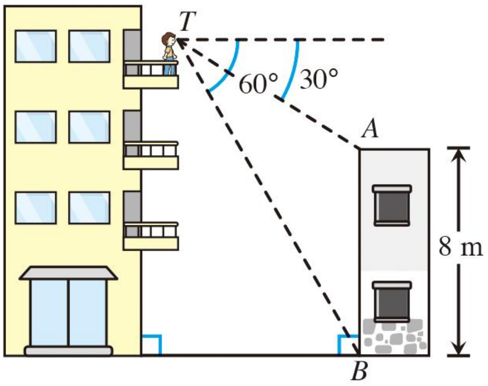
17. 圖中，大廈的高度是 80 m。P 和 Q 是水平地面上相距 20 m 的兩點。由 P 測得大廈頂部 A 的仰角是 43°。已知 A、P 和 Q 位於同一鉛垂平面上，求由 Q 測得 A 的仰角。



18. 圖中顯示一幢大廈 NO。M 是大廈上的一點，使 $NO = 2MO$。一輛汽車位於水平地面上的 P 點。已知 N、M、O 和 P 位於同一鉛垂平面上。若由 P 測得 M 的仰角是 25°，求由 P 測得 N 的仰角。



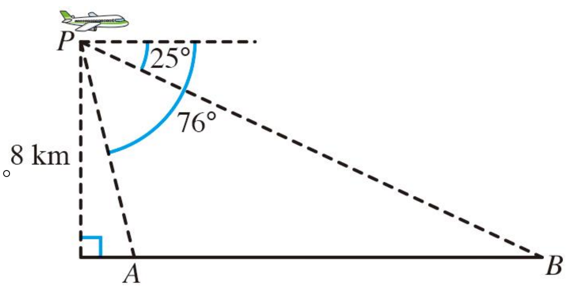
19. 圖中，一名男子站在大廈的一個露台上。由該男子的眼睛（T）測得某房屋頂部 A 和底部 B 的俯角分別是 30° 和 60°。已知 T、A 和 B 位於同一鉛垂平面上。若該房屋的高度是 8 m，求 T 離地面的高度。



20. 圖中，一飛機在離地面 8 km 的高度飛行，駕駛員在 P 點望向 A 和 B 兩個城鎮。假設 A、B 和 P 位於同一個鉛垂平面上。由 P 測得城鎮 A 和 B 的俯角分別是 76° 和 25°。

(a) A 與 B 之間的距離是多少？

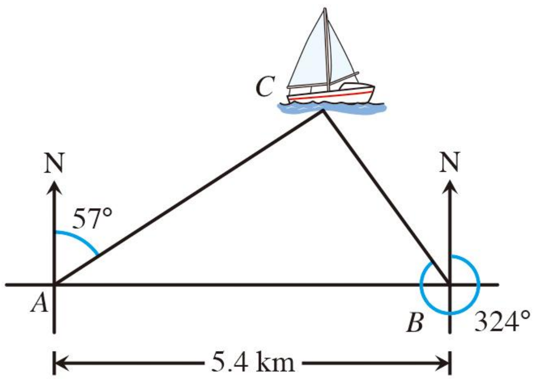
(b) 若飛機隨後以 200 km/h 的固定速率水平地飛行，求飛機到達 B 的正上方所需的時間（以分鐘為單位）。



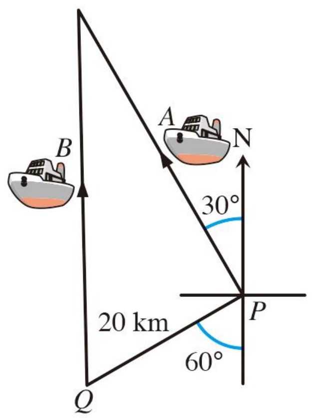
21. 圖中，雷達站 A 位於雷達站 B 的正西方 5.4 km 處。由 A 測得船 C 的方位是 057°，而由 B 測得 C 的方位是 324°。

(a) 求 C 與 AB 之間的最短距離。

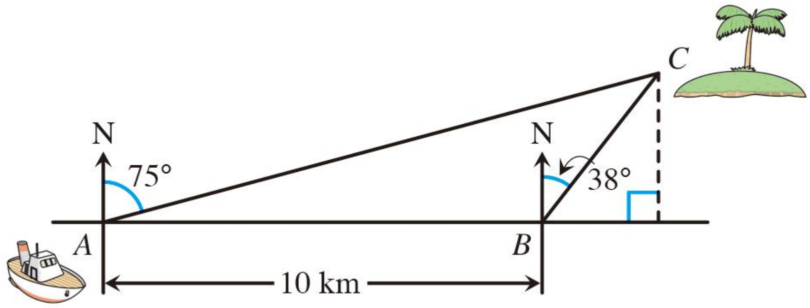
(b) 求 A 與 C 之間的距離。



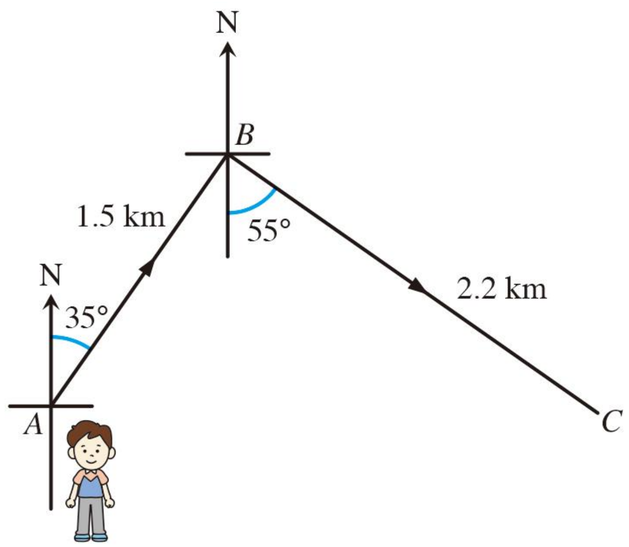
22. 圖中，兩艘船 A 和 B 同一時間分別離開港口 P 和 Q，它們都以固定速率航行。A 以速率 15 km/h 沿 N30°W 的方向航行。由 P 測得 Q 的方位是 S60°W。P 與 Q 之間的距離是 20 km。若船 A 和 B 在離開港口兩小時後相遇，求船 B 的航行速率和航行方向。



23. 圖中，由位於 A 點的小艇測得島 C 的方位是 N75°E。小艇向正東方向航行 10 km 到達 B。由 B 測得 C 的方位是 N38°E。若小艇由 B 開始以固定速率 10 km/h 向正東方向航行，求小艇與 C 之間的距離為最短時所需的航行時間（以分鐘為單位）。



24. 圖中，<u>志樂</u>沿 N35°E 的方向由 A 步行 1.5 km 至 B，然後沿 S55°E 的方向由 B 步行 2.2 km 至 C。最後，他以固定速率由 C 以直線的路線返回 A。



(a) 求他回程的步行方向。

(b) 若他需要在 10 分鐘內返回 A，試寫出一個他回程的可能速率。

25. 一輛汽車由 P 行駛 12 km 至 Q，然後沿 N30°E 的方向由 Q 行駛 15 km 至 R。由 P 測得 Q 的方位是 N40°E。

(a) 求 P 與 R 之間的距離。

(b) 求由 P 測得 R 的真方位角，準確至最接近的度。

ANS:

Part 1:

1. $\sin\theta = \frac{4}{5}$, $\cos\theta = \frac{3}{5}$, $\tan\theta = \frac{4}{3}$

2. $\sin\theta = \frac{5}{13}$, $\cos\theta = \frac{12}{13}$, $\tan\theta = \frac{5}{12}$

3. x= 11.0, y =9.24

4. x=14.7, y = 12.3

5. x= 20.1, y= 22.3

6. x= 12, y = 20.8

7. x= 17, θ = 61.9°

8. x= 12.5, θ= 28.6°

9. x= 8.51, θ= 64.8°

10. x= 13.3, θ= 27.8°

11. 51.9°

12. 114°

13. 45°

14. 72.5°.

15. 26.5 m.

16. 73.7°

17. 19.1 m^2

18. 41.4 m

19. 62.3°

20. 59.8°

21. (a) 0.306, **(b)** 72.2°

22. (a) 0.695, **(b)** 20.3°

23. 8.87

24. 8.45

25. 85.4°

26. θ= 23.6°, x= 32.1

Part 2:

1. $\sin\theta = \frac{3}{\sqrt{58}}$, $\cos = \frac{7}{\sqrt{58}}$, $\tan\theta = \frac{3}{7}$

2. $\sin\theta = \frac{4}{\sqrt{97}}$, $\cos\theta = \frac{9}{\sqrt{97}}$

3. $\cos\theta = \frac{12}{13}$, $\tan\theta = \frac{5}{12}$

4. $\sin\theta = \frac{\sqrt{63}}{8}$, $\tan\theta = \sqrt{63}$

5. $\frac{3}{8}$

6. $\frac{3}{2}$

7. $\frac{5}{4}$

8. $\frac{1}{3}$

9. 45°

10. 60°

11. 30°

12. 45°

13. 6.5

14. $5\sqrt{3}$

15. $\sin\theta$

16. $\tan\theta$

17. $\tan^2\theta$

18. $\sin^2\theta$

19. $\cos^2\theta$

20. $\tan^2\theta$

21. 1

22. 0

23. 0

24. 1

25. 2

26. $\frac{13}{10}$

27. 24°

28. 36°

33. $\frac{6}{5\sqrt{15}}$

34. $\frac{10\sqrt{12}}{13}$ $\left(\text{or } \frac{20\sqrt{3}}{13}\right)$

35. 30°

36. 15°

37. 5°

38. 45°

39. 30°

40. 30°

41. $x = 3\sqrt{3}$, $y = 6\sqrt{3}$

42. $x = \frac{14}{\sqrt{3}}$, $y = \frac{28}{3}$

43. $\tan\theta$

44. 0

45. $2\tan\theta$

46. $\frac{1}{\cos\theta}$

47. 100

48. $\frac{3\sqrt{21}+8}{25}$

Part 3:

1. (a) $\frac{1}{4}$ **(b)** 14.0°

2. (a) 13.0° **(b)** 51.3 m.

3. (a) 281 m **(b)** 1080 m

4. Gradient of AB= $\frac{1}{5}$

The inclination of AB is 11.3°

5. 28.8°

6. 24.4 m

7. 2.47 m

8. (a) 687 m **(b)** 481

9. N40°E.

10. (a) 325° **(b)** 198° **(c)** 067°

11. (a) 303° **(b)** 123°

12. (a) 11.2 km **(b)** S26.4°E

13. Horizontal distance traveled=408 m,
Vertical distance travelled= 186 m

14. (a) 562 m **(b)** 15.7°

15. (a) Inclination of AB =20.6°
Inclination of AC=10.6°
(b) AB is steeper.
(c) 427 m

16. (a) 18 000 **(b)** 26.8°

17. 50.6°

18. 43.0°

19. 12 m

20. (a) 15.2 km **(b)** 5.15 min

21. (a) 2.38 km **(b)** 4.37 km

22. Speed of boat B = 18.0 km/h,
sailing direction of boat B : N3.69°E.

23. 15.9 min

24. (a) N89.3°W
(b) 16 km/h (Or other reasonable answers.)

25. (a) 26.9 km **(b)** 034°

中文版

中三 指數定律及多項式

Revision Notes:

1. Zero Index and Negative Integral Indices 零指數和負整數指數

(a) The zero index of any non-zero number a is defined as 1.

任何非零數 a 的零指數定義為 1。

i.e. $a^0 = 1$, where $a \neq 0$.

(b) The negative integral index of any non-zero number a, say a^{-n}, is defined as $\dfrac{1}{a^n}$.

任何非零數 a 的負整數指數（例如 a^{-n}）定義為 $\dfrac{1}{a^n}$ 。

i.e. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, where $a \neq 0$ and n is a positive integer.

e.g. **(i)** $5^0 = \underline{1}$, $(-6)^0 = \underline{1}$.

(ii) $3^{-2} = \dfrac{1}{3^2} = \underline{\underline{\dfrac{1}{9}}}$, $(-2)^{-5} = \dfrac{1}{(-2)^5} = \underline{\underline{-\dfrac{1}{32}}}$.

2. Laws of Integral Indices 整數指數定律

If m and n are integers, $a \neq 0$ and $b \neq 0$, then

(a) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ **(b)** $a^m \div a^n = a^{m-n}$ **(c)** $(a^m)^n = a^{m \times n}$

(d) $(ab)^n = a^n b^n$ **(e)** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

e.g. **(i)** $2^7 \times 2^3 = 2^{7+3} = \underline{\underline{2^{10}}}$ $a^7 \times a^3 = a^{7+3} = \underline{\underline{a^{10}}}$

(ii) $2^7 \div 2^3 = 2^{7-3} = \underline{\underline{2^4}}$ $a^7 \div a^3 = a^{7-3} = \underline{\underline{a^4}}$

(iii) $(2^7)^3 = 2^{7\times 3} = \underline{\underline{2^{21}}}$ $(a^7)^3 = a^{7\times 3} = \underline{\underline{a^{21}}}$

(iv) $(2b)^3 = 2^3b^3 = \underline{\underline{8b^3}}$ $(a^2b)^3 = (a^2)^3b^3 = a^{2\times 3}b^3 = \underline{\underline{a^6b^3}}$

(v) $\left(\dfrac{2}{b}\right)^3 = \dfrac{2^3}{b^3} = \underline{\underline{\dfrac{8}{b^3}}}$ $\left(\dfrac{a^2}{b}\right)^3 = \dfrac{(a^2)^3}{b^3} = \dfrac{a^{2\times 3}}{b^3} = \underline{\underline{\dfrac{a^6}{b^3}}}$

3. Polynomials 多項式

(a) A ***monomial*** is an algebraic expression which can be **(i)** a number, **(ii)** a variable or **(iii)** the product of a number and one or more variables.

e.g. 5, $-2a$, $4xy^2$ and $\dfrac{1}{6}x^3$ are monomials. $x + 1$, $\dfrac{1}{x}$ and $\sqrt{x}$ are not monomials.

單項式是一個代數式，它可以是 **(i)** 一個數、**(ii)** 一個變數或 **(iii)** 一個數與一個或多個變數相乘的積。

例如：5、$-2a$、$4xy^2$ 和 $\dfrac{1}{6}x^3$ 都是單項式。$x + 1$、$\dfrac{1}{x}$ 和 $\sqrt{x}$ 不是單項式。

(b) The ***coefficient*** of a monomial is its numerical part.

e.g. The coefficient of $-2a$ is -2. The coefficient of $4xy^2$ is 4.

單項式的數字部分稱為單項式的**係數**。

例如：$-2a$ 的係數是 -2，$4xy^2$ 的係數是 4。

(c) The ***degree*** of a monomial is the sum of the indices of all the variables.

e.g. The degree of $-2a$ is 1. The degree of $4xy^2$ is 3.

單項式的**次數**是所有變數的指數之和。

例如：$-2a$ 的次數是 1，$4xy^2$ 的次數是 3。

(d) A monomial or the sum of monomials is called a ***polynomial***. Each monomial is called a ***term*** of the polynomial. Among all the terms in a polynomial, the one with the highest degree determines the degree of the polynomial.

e.g. The degree of $-3x^2 + x^4 + 7$ is 4. The degree of $x^5y - 3x^2y + y^4$ is 6.

一個單項式或多個單項式之和稱為**多項式**，而每個單項式稱為多項式的**項**。一個多項式的次數由其中次數最高的項而定。

例如：$-3x^2 + x^4 + 7$ 的次數是 4，$x^5y - 3x^2y + y^4$ 的次數是 6。

(e) A polynomial can be written in descending or ascending powers of the variable.

e.g. The terms of the polynomial $x^4 - 3x^2 + 7$ are arranged in descending powers of x.

The terms of the polynomial $7 - 3x^2 + x^4$ are arranged in ascending powers of x.

多項式的各項可按變數的降冪或升冪排列。

例如：多項式 $x^4 - 3x^2 + 7$ 是按變數 x 的降冪排列寫成，而

多項式 $7 - 3x^2 + x^4$ 則是按變數 x 的升冪排列寫成。

(f) Consider the polynomial $x^4 - 3x^2 + 7$. 考慮多項式 $x^4 - 3x^2 + 7$。

(i)

Variable 變數	**Degree** 次數	**Coefficients of** x 各次冪的係數				**Constant term** 常數項	**Number of terms** 項數
		x^4	x^3	x^2	x		
x	4	1	0	–3	0	7	3

(ii) When $x = 1$, the value of the polynomial $= (1)^4 - 3(1)^2 + 7 = 5$.

當 $x = 1$ 時，多項式的值 $= (1)^4 - 3(1)^2 + 7 = 5$。

4. Addition, Subtraction and Multiplication of Polynomials 多項式的加法、減法和乘法

(a) In performing addition and subtraction of polynomials, we should group the like terms together and then combine the like terms.

進行多項式的加法和減法時，我們應先把同類項組合起來，然後合併同類項。

(b) In performing multiplication of polynomials, we can apply the distributive law of multiplication.

進行多項式的乘法時，我們可以利用乘法分配律。

5. Factorization 因式分解

(a) Expressing a polynomial as a product of its factors is called factorization.

把一個多項式寫成其因式之積，這個過程稱為因式分解。

(b) The following methods can be used to factorize polynomials: 我們可利用以下方法因式分解多項式：

(i) Taking out common factors. 提取公因式

(ii) Grouping terms. 併項法

(iii) Using identities [e.g. $a^2 - b^2 \equiv (a + b)(a - b)$, $a^2 + 2ab + b^2 \equiv (a + b)^2$, $a^2 - 2ab + b^2 \equiv (a - b)^2$,

利用恆等式 $a^3 - b^3 \equiv (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, $a^3 + b^3 \equiv (a + b)(a^2 - ab + b^2)$].

(iv) The cross-method. 十字相乘法

Worked examples:

Example 1.1 Find the values of the following expressions without using a calculator and give the answers in integers or fractions. 試不用計算機求下列數式的值，答案以整數或分數表示。

(a) $8^2 \times 5^0$ **(b)** $3^{-2} \times (-2)^3$ **(c)** $5^{-2} \div 5^{-6}$ **(d)** $(7^3)^2 \times 7^{-4}$

(e) $(2^3)^{-2} \div (4^{-1})^3$ **(f)** $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-5} \times 9^{-2}$

Solution

(a) $8^2 \times 5^0 = 64 \times 1$ $\quad a^0 = 1$

$= \underline{\underline{64}}$

(b) $3^{-2} \times (-2)^3 = \frac{1}{3^2} \times (-8)$ $\quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$= \frac{1}{9} \times (-8)$

$= \underline{\underline{-\frac{8}{9}}}$

(c) $5^{-2} \div 5^{-6} = 5^{-2-(-6)}$ $\quad a^m \div a^n = a^{m-n}$

$= 5^4$

$= \underline{\underline{625}}$

(d) $(7^3)^2 \times 7^{-4} = 7^{3 \times 2} \times 7^{-4}$ $\quad (a^m)^n = a^{m \times n}$

$= 7^6 \times 7^{-4}$

$= 7^{6+(-4)}$ $\quad a^m \times a^n = a^{m+n}$

$= 7^2$

$= \underline{\underline{49}}$

(e) $(2^3)^{-2} \div (4^{-1})^3 = 2^{3 \times (-2)} \div 4^{(-1) \times 3}$ $\quad (a^m)^n = a^{m \times n}$

$= 2^{-6} \div 4^{-3}$

$= 2^{-6} \div (2^2)^{-3}$ ➲ $4 = 2^2$

$= 2^{-6} \div 2^{2 \times (-3)}$

$= 2^{-6} \div 2^{-6}$

$= \underline{\underline{1}}$

(f) $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{-5} \times 9^{-2} = (-3)^5 \times (3^2)^{-2}$ ➲ $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, $9 = 3^2$.

$= (-1)^5(3^5) \times 3^{2 \times (-2)}$ ➲ $(-3)^5 = [(-1)(3)]^5 = (-1)^5(3^5)$

$= -3^5 \times 3^{-4}$

$= -3^{5 + (-4)}$ ➲ $a^m \times a^n = a^{m+n}$

$= \underline{\underline{-3}}$

Example 1.2 Simplify the following expressions and express the answers with positive indices.

(*All the letters in the expressions represent positive numbers*.)

簡化下列數式，答案以正指數表示。（數式中所有字母都代表正數。）

(a) $(a^{-4}b)^{-1}$ **(b)** $(c^{-3})^2(c^{-1})^{-5}$

(c) $\dfrac{(x^2y)^3}{x^{-4}y^5}$ **(d)** $(m^{-2}n^3)^{-4}\left(\dfrac{n^2}{m}\right)^5$

Solution

(a) $(a^{-4}b)^{-1} = a^{-4 \times (-1)}b^{-1}$ ➲ $(ab)^n = a^nb^n$

$= a^4b^{-1}$ ➲ $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

$= \underline{\underline{\dfrac{a^4}{b}}}$

(b) $(c^{-3})^2(c^{-1})^{-5} = c^{-3 \times 2}c^{-1 \times (-5)}$ ➲ $(a^m)^n = a^{m \times n}$

$= c^{-6}c^5$ ➲ $a^m \times a^n = a^{m+n}$

$= c^{-6+5}$

$= c^{-1}$

$= \underline{\underline{\dfrac{1}{c}}}$ ➲ $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

(c) $\dfrac{(x^2y)^3}{x^{-4}y^5} = \dfrac{x^{2\times3}y^3}{x^{-4}y^5}$ ➲ $(ab)^n = a^nb^n$

$= \dfrac{x^6y^3}{x^{-4}y^5}$

$= x^{6-(-4)}y^{3-5}$ ➲ $\dfrac{a^m}{a^n} = a^m \div a^n = a^{m-n}$

$= x^{10}y^{-2}$

$= \underline{\underline{\dfrac{x^{10}}{y^2}}}$

(d) $(m^{-2}n^3)^{-4}\left(\dfrac{n^2}{m}\right)^5 = m^{-2\times(-4)}n^{3\times(-4)}\left(\dfrac{n^{2\times5}}{m^5}\right)$ ➲ $(ab)^n = a^nb^n$, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

$= m^8n^{-12}\left(\dfrac{n^{10}}{m^5}\right)$

$= m^{8-5}n^{-12+10}$ ➲ $a^m \times a^n = a^{m+n}$, $a^m \div a^n = a^{m-n}$

$= m^3 n^{-2}$

$= \underline{\underline{\dfrac{m^3}{n^2}}}$

Example 1.3 Simplify $(2a - b) + (2b - 3a)$. 簡化 $(2a - b) + (2b - 3a)$。

Solution

$(2a - b) + (2b - 3a)$

$= 2a - b + 2b - 3a$ ⊂ Remove (撤去) the brackets (括號).

$= 2a - 3a - b + 2b$ ⊂ Group (組合) the like terms (同類項) and combine (合併) the like terms.

$= \underline{\underline{-a + b}}$

Example 1.4 **(a)** Add $2x + x^2 + 3$ to $3x^2 - x + 1$. 求 $3x^2 - x + 1$ 加上 $2x + x^2 + 3$ 的結果。

(b) Subtract $3x^3 + 5x - 6$ from $2x^3 - x^2 + 4$. 求從 $2x^3 - x^2 + 4$ 減去 $3x^3 + 5x - 6$ 的結果。

Solution

(a) $(3x^2 - x + 1) + (2x + x^2 + 3)$

$= 3x^2 - x + 1 + 2x + x^2 + 3$

$= 3x^2 + x^2 - x + 2x + 1 + 3$ ⊂ Arrange the terms in descending powers (降冪) of x and combine the like terms.

$= \underline{\underline{4x^2 + x + 4}}$

(b) $(2x^3 - x^2 + 4) - (3x^3 + 5x - 6)$

$= 2x^3 - x^2 + 4 - 3x^3 - 5x + 6$ ⊂ Beware of the '+' and '–' signs when brackets are removed.

$= 2x^3 - 3x^3 - x^2 - 5x + 4 + 6$

$= \underline{\underline{-x^3 - x^2 - 5x + 10}}$

Example 1.5 Simplify the following polynomials. 簡化下列多項式。

(a) $6x - 4 + 2x^3 - 2x + 1 - x^2 - x^3$ **(b)** $5 - x^4 + 3x^2 - 8 + 7x^4 - 2x^2 + x$

Solution

(a) $6x - 4 + 2x^3 - 2x + 1 - x^2 - x^3$

$= 2x^3 - x^3 - x^2 + 6x - 2x - 4 + 1$

$= \underline{\underline{x^3 - x^2 + 4x - 3}}$

(b) $5 - x^4 + 3x^2 - 8 + 7x^4 - 2x^2 + x$

$= -x^4 + 7x^4 + 3x^2 - 2x^2 + x + 5 - 8$

$= \underline{\underline{6x^4 + x^2 + x - 3}}$

Example 1.6 Multiply $x - 2$ by $4x^2 + 3$. 求 $x - 2$ 乘以 $4x^2 + 3$ 的結果。

Solution

$(x - 2)(4x^2 + 3)$ ⊂ $(a + b)(c + d)$

$= (x - 2)(4x^2) + (x - 2)(3)$ $= (a + b)c + (a + b)d$

$= (x)(4x^2) - (2)(4x^2) + (x)(3) - (2)(3)$ $= ac + bc + ad + bd$

$= \underline{\underline{4x^3 - 8x^2 + 3x - 6}}$

Example 1.7 Factorize the following polynomials by taking out common factors.

利用提取公因式的方法，因式分解下列多項式。

(a) $6x^2 - 3xy$ **(b)** $5x^3 - 10x^2 + 15x$

Solution

(a) $6x^2 - 3xy = (3x)(2x) - (3x)(y)$

$= \underline{\underline{3x(2x - y)}}$ ⊂ Take out the common factor $3x$.

(b) $5x^3 - 10x^2 + 15x = (5x)(x^2) - (5x)(2x) + (5x)(3)$

$= \underline{\underline{5x(x^2 - 2x + 3)}}$ ⊂ Take out the common factor $5x$.

Example 1.8 Factorize the following polynomials by grouping terms. 利用併項法，因式分解下列多項式。

(a) $xy + 1 - x - y$ **(b)** $ab - dc + bc - ad$

Solution

(a)
$$\begin{aligned} xy + 1 - x - y &= (xy - x) + (1 - y) \\ &= x(y - 1) - (y - 1) \\ &= \underline{\underline{(y - 1)(x - 1)}} \end{aligned}$$

Arrange the terms into two groups.

You can expand $(y - 1)(x - 1)$ to check whether the result is the same as the given polynomial.

(b)
$$\begin{aligned} ab - dc + bc - ad &= (ab - ad) + (bc - dc) \\ &= a(b - d) + c(b - d) \\ &= \underline{\underline{(b - d)(a + c)}} \end{aligned}$$

Example 1.9 Factorize the following polynomials by using identities.
利用恆等式，因式分解下列多項式。

(a) $25x^2 - y^2$ **(b)** $(2x - 1)^2 - x^2$ **(c)** $x^2 + 16x + 64$

(d) $4x^2 - 4xy + y^2$ **(e)** $27x^3 + y^3$ **(f)** $4x^3 - 32y^3$

Solution

(a)
$$\begin{aligned} 25x^2 - y^2 &= (5x)^2 - y^2 \\ &= \underline{\underline{(5x + y)(5x - y)}} \end{aligned}$$

$a^2 - b^2 \equiv (a + b)(a - b)$
$a = 5x$ and $b = y$.

(b)
$$\begin{aligned} (2x - 1)^2 - x^2 &= (2x - 1 + x)(2x - 1 - x) \\ &= \underline{\underline{(3x - 1)(x - 1)}} \end{aligned}$$

$a = 2x - 1$ and $b = x$.

(c)
$$\begin{aligned} x^2 + 16x + 64 &= x^2 + 2(x)(8) + 8^2 \\ &= \underline{\underline{(x + 8)^2}} \end{aligned}$$

$a^2 + 2ab + b^2 \equiv (a + b)^2$
$a = x$ and $b = 8$.

(d)
$$\begin{aligned} 4x^2 - 4xy + y^2 &= (2x)^2 - 2(2x)(y) + y^2 \\ &= \underline{\underline{(2x - y)^2}} \end{aligned}$$

$a^2 - 2ab + b^2 \equiv (a - b)^2$
$a = 2x$ and $b = y$.

(e)
$$\begin{aligned} 27x^3 + y^3 &= (3x)^3 + y^3 \\ &= (3x + y)[(3x)^2 - (3x)(y) + y^2] \\ &= \underline{\underline{(3x + y)(9x^2 - 3xy + y^2)}} \end{aligned}$$

$a^3 + b^3 \equiv (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
$a = 3x$ and $b = y$.

(f)
$$\begin{aligned} 4x^3 - 32y^3 &= 4(x^3 - 8y^3) \\ &= 4[x^3 - (2y)^3] \\ &= 4(x - 2y)[x^2 + (x)(2y) + (2y)^2] \\ &= \underline{\underline{4(x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)}} \end{aligned}$$

$a^3 - b^3 \equiv (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
$a = x$ and $b = 2y$.

Example 1.10 Factorize the following polynomials by using the cross-method.
利用十字相乘法，因式分解下列多項式。

(a) $x^2 + 2x - 3$ **(b)** $4x^2 - 9x + 2$ **(c)** $6x^2 - 13x - 5$

Solution

(a) $x^2 + 2x - 3 = \underline{\underline{(x - 1)(x + 3)}}$

$$\begin{array}{cccc} x & \times & -1 & \\ x & & +3 & \\ \hline -x & & +3x & = +2x \end{array}$$

(b) $4x^2 - 9x + 2 = \underline{\underline{(4x - 1)(x - 2)}}$

$$\begin{array}{cccc} 4x & \times & -1 & \\ x & & -2 & \\ \hline -x & & -8x & = -9x \end{array}$$

(c) $6x^2 - 13x - 5 = \underline{(2x-5)(3x+1)}$

$$\begin{array}{ccccc} 2x & & -5 \\ 3x & & +1 \\ \hline -15x & & +2x & = & -13x \end{array}$$

練習

<u>Part 1 指數</u>

試不使用計算機，求下列各數式的值。**(1 – 7)** (如有需要，答案以分數表示。)

1. **(a)** $\left(\dfrac{1}{4}\right)^0$ **(b)** $\dfrac{1}{(-9)^0}$

2. **(a)** $7^0 \times 7$ **(b)** $3 \div (-5)^0$

3. **(a)** 5^{-2} **(b)** $(-6)^{-3}$

4. **(a)** $-\left(\dfrac{5}{2}\right)^0$ **(b)** $\left(-\dfrac{1}{8}\right)^{-2}$

5. **(a)** $(-3)^3 \times 9^{-1}$ **(b)** $(-2)^{-3} \times (-3)^{-2}$

6. **(a)** $8^{-2} \div 4^{-2}$ **(b)** $9^{-3} \div (-6)^{-2}$

7. **(a)** $2^0 \times \left(\dfrac{3}{5}\right)^{-3}$ **(b)** $(-3)^{-3} \div \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$

化簡下列各數式，並以正指數表示答案。**(8 – 18)**

8. **(a)** $(b^{-2})^3$ **(b)** $(t^0)^{-7}$

9. **(a)** $\left(\dfrac{1}{x^{-2}}\right)^6$ **(b)** $\left(-\dfrac{1}{y^3}\right)^{-5}$

10. **(a)** $x^9 \times x^{-4}$ **(b)** $y^{-3} \div y^2$

11. **(a)** $2a^{-1} \times 5a^{-5}$ **(b)** $-3b^{-2} \div (6b^{-7})$

12. **(a)** $(v^{-1})^3 \times v^5$ **(b)** $(u^3)^{-3} \div (u^{-2})^{-2}$

13. **(a)** $\dfrac{a^3 \times a^0}{a^{-7}}$ **(b)** $\dfrac{b^3}{b^{-2} \times b^9}$

14. **(a)** $(m^5 n^{-4})^{-3}$ **(b)** $\left(-\dfrac{e^{-2}}{f^2}\right)^4$

15. **(a)** $(4a^2 b^{-1})^{-2}$ **(b)** $(-7c^{-3} d^6)^3$

16. **(a)** $\left(\dfrac{u^5}{3t^8}\right)^{-2}$ **(b)** $\left(\dfrac{-2x^3}{y^{-5}}\right)^{-4}$

17. **(a)** $\dfrac{x^7 y^0}{x^5 y^{-4}}$ **(b)** $\dfrac{v^3 s^{-1}}{v^{-2} s^3}$

18. **(a)** $\dfrac{b^2}{(ab^{-2})^4}$ **(b)** $\dfrac{(c^2d^{-1})^{-3}}{c^{-4}d^5}$

試不使用計算機，求下列各數式的值。**(19 – 21)** (如有需要，答案以分數表示。)

19. **(a)** $12^0 - 16^{-1} \times 4$ **(b)** $36 \div 6^0 + 3^{-2} \times 9$

20. **(a)** $-81^2 \times 27^{-4}$ **(b)** $49^{-1} \div 7^{-1} - 32 \times (-4)^{-3}$

21. **(a)** $-4^{-4} \times \left(\dfrac{3^{-1}}{4}\right)^{-3}$ **(b)** $\left(-\dfrac{2}{5}\right)^{-4} \div \left(\dfrac{4}{25}\right)^{-3}$

化簡下列各數式，並以正指數表示答案。**(22 – 29)**

22. **(a)** $\dfrac{(2a^{-2}b^5)^4}{8}$ **(b)** $\dfrac{(p^{-3}q^4)^0}{(3p^4q^{-3})^{-3}}$

23. **(a)** $(4u^3v^{-5})^2 \times uv^2$ **(b)** $6a^4b^3 \times (-2a^{-2}b^4)^{-3}$

24. **(a)** $x^{-7}y^6 \div (5xy^{-2})^3$ **(b)** $(2m^3n^{-2})^5 \div (-4m^5n^{-4})$

25. **(a)** $(p^{-1}q^{-2})^3 \times (p^{-2}q)^{-2}$ **(b)** $(16r^5s^{-2})^{-1} \div (2rs^3)^{-4}$

26. **(a)** $(2p^{-3}q^4 \times 3p^2q^{-1})^2$ **(b)** $\left(\dfrac{2x^{-4}y^5}{4x^{-2}y^{-1}}\right)^{-3}$

27. **(a)** $6hk^{-2} \times (h^{-3}k^2)^{-2} \div (h^0k^{-5})^3$ **(b)** $(-3a^{-2}b)^{-3} \div (6a^3b^{-1})^{-2} \times \dfrac{a^{-9}}{b^{-4}}$

28. **(a)** $\dfrac{(8mn)^0(m^2n)^4}{(4m^2n^{-7})^{-1}}$ **(b)** $\dfrac{(-h^2k)^{-3}}{(3h^{-1}k^4)^2(-h^7k^{-2})^{-2}}$

29. **(a)** $\dfrac{25}{(a^{-2}b)^4} \times \left(\dfrac{5a^2b^{-3}}{3a^{-5}b^{-2}}\right)^{-2}$ **(b)** $\left(\dfrac{x^{-3}y^{-1}}{2}\right)^{-5}\left(\dfrac{8x^7y^{-2}}{y^{-4}}\right)^{-2}$

已知 n 為正整數，化簡下列各數式，並以正指數表示答案。**(30 – 31)**

30. **(a)** $\dfrac{2^{n+2}}{4 \times (2^n)^{-2}}$ **(b)** $\dfrac{3^{-3} \times 9^{1-n}}{3^{2n}}$

31. **(a)** $2^{n-3} \times 4^{-2n} \times 8^{1-n}$ **(b)** $3^{3n-1} \times 27^{n-1} \div 9^{n-1}$

Part 2 多項式

1. 完成下表。

多項式	項數	係數				常數項	多項式的次數
		x^3	x^2	x	x^3y		

(a)	$5x - 7x^2 + 8x^3 - 2$							
(b)	$3x^3y - 4x^2 + 6x$							
(c)	$-x^2 + 9x + 3$							
(d)	$8x - 5x^2 + 4x^3 - x^3y - 7$							

2. 考慮多項式 $3a - 6a^3 + 5a^2 - 9$。

(a) 按 a 的降冪次序排列多項式的項。

(b) 按 a 的升冪次序排列多項式的項。

3. 考慮多項式 $-8x^2 + 7x - 2x^5 + 11$。

(a) 按 x 的降冪次序排列多項式的項。

(b) 按 x 的升冪次序排列多項式的項。

化簡下列各式。**(4 – 11)**

4. (a) $(5x + 9) + (3x - 7)$ **(b)** $(4 - 3y) + (6y - 11)$

5. (a) $(2x + y) - (x + 4y)$ **(b)** $(7y - 2x) - (5x + 8y)$

6. (a) $(2x^2 - 6x - 1) + (x^2 + 5x + 2)$ **(b)** $(x^2 + 4x + 7) + (x^2 - 9x - 3)$

7. (a) $(-3x^2 + 5x - 8) + (2x^2 - 5x - 4)$ **(b)** $(6x^2 - x - 6) + (-4x^2 - 8x - 1)$

8. (a) $(5x^2 + 8x + 9) - (x^2 + x + 3)$ **(b)** $(x^2 - 4x - 3) - (6x^2 + 2x + 5)$

9. (a) $(-7x^2 + x + 8) - (x^2 - x + 8)$ **(b)** $(2x^2 - 5x - 7) - (-3x^2 - 6x + 9)$

10. (a) 求 $-8x^2 - 3x + 10$ 加上 $4x^2 + 2x + 5$ 的結果。

(b) 求從 $x^2 - 9x - 1$ 減去 $-6x^2 + 2x + 7$ 的結果。

11. (a) 求 $x^3 - 7x^2 - 6x + 7$ 加上 $-2x^3 - 3x^2 + 8x - 11$ 的結果。

(b) 求從 $9x^3 - x^2 + 4x - 2$ 減去 $3x^3 + 5x^2 - x - 9$ 的結果。

展開下列各式。**(12 – 19)**

12. (a) $6x(x + 3)$ **(b)** $-2x(4x - 7)$

13. (a) $-x(8 - 5x)$ **(b)** $3x(6x + x^2)$

14. (a) $(7x - 2)(4x)$ **(b)** $(2x^2 + x)(-5x^3)$

15. **(a)** $(x-9)(x+5)$ **(b)** $(x+4)(6-x)$

16. **(a)** $(2x+1)(x+7)$ **(b)** $(5x-2)(3x-8)$

17. **(a)** $(5x+8)(3-4x)$ **(b)** $(x^2+7)(4x+1)$

18. **(a)** $(x-6y)(x-y)$ **(b)** $(2x-y)(x+5y)$

19. **(a)** $(8x+y)(2y-5x)$ **(b)** $(4y-9x)(3x-7y)$

化簡下列各式。**(20 – 21)**

20. $(3x-2)(6x+7)-9x$ **21.** $8x^2+(5x+4)(9-2x)$

化簡下列各式。**(22 – 25)**

22. $(-x^3+2x^2-5)+(-3x^2+x+4)$

23. $(4x^3-6x-7x^2+2)-(4x-6-7x^3+2x^2)$

24. $(2xy+4xz+z)+(7xz-5xy)-(3z+xz-6xy)$

25. $(4x^2-7+3x^3)-[(8x^2+6x+1)-(5x^3+2x-9)]$

展開下列各式。**(26 – 29)**

26. **(a)** $4x(5x^2+x-6)$ **(b)** $(7x-8x^2+3)(-x^2)$

27. **(a)** $(7-6x)(x^2+4x+2)$ **(b)** $(3x+1)(9x^3+5x-4)$

28. **(a)** $(3x+2)(x^2-7x+5)$ **(b)** $(4x-5)(3x^2-6x+7)$

29. **(a)** $(10-5x-4x^2)(2x+9)$ **(b)** $(2x^2-7x+4)(5-8x^2)$

化簡下列各式。**(30 – 33)**

30. $(x-2)(9x+4)+(3x+1)(8-3x)$

31. $(x+7)^2-(4x+9)(1-2x)$

32. $(1-6x)(3x^3+5-2x^2)-7x(4x+1)$

33. $(3x-2)(x+6)(x-5)+17x$

Part 3 因式分解

因式分解下列各式。**(1 – 16)**

1. **(a)** $6p^2+24$ **(b)** $3x^2-x$

2. **(a)** $-ab - 7ac$ **(b)** $m^3n - 4mn^2$

3. **(a)** $10x^2 - 5y + 20z$ **(b)** $2cd + d^4 + 9d$

4. **(a)** $12k^3 + 8k^2 - 2k$ **(b)** $-p^3q^3 - p^2q - 6pq^3$

5. **(a)** $3xz + 4yz + 9x + 12y$ **(b)** $6ad - 2cd + 3ab - bc$

6. **(a)** $5m^2 + 7m - 10mn - 14n$ **(b)** $3xy^2 - 12x^2 + 2y^3 - 8xy$

7. **(a)** $pr + 18q + 3pq + 6r$ **(b)** $-5ac + 4bd - 10ab + 2cd$

8. **(a)** $4xy - 15yz + 20y^2 - 3xz$ **(b)** $7m^3 + 3n^2 + 21mn + m^2n$

9. **(a)** $r^2 - 16$ **(b)** $81 - k^2$

10. **(a)** $-9p^2 + 4$ **(b)** $64c^2 - 25$

11. **(a)** $36x^2 - y^2$ **(b)** $-49m^2 + 100n^2$

12. **(a)** $a^2 + 8a + 16$ **(b)** $k^2 - 14k + 49$

13. **(a)** $9s^2 - 12s + 4$ **(b)** $36b^2 + 60b + 25$

14. **(a)** $x^2 - 16xy + 64y^2$ **(b)** $4m^2 + 36mn + 81n^2$

15. **(a)** $96b^2 - 54a^2$ **(b)** $x^2y^4 - x^4y^2$

16. **(a)** $7c^2 - 28c + 28$ **(b)** $-27p^2 - 72pq - 48q^2$

因式分解下列各式。**(17 – 22)**

17. **(a)** $k^3 + 343$ **(b)** $n^3 - 729$

18. **(a)** $216 - z^3$ **(b)** $125x^3 + 64$

19. **(a)** $a^3 + 27b^3$ **(b)** $512p^3 - q^3$

20. **(a)** $125m^3 + 8n^3$ **(b)** $343x^3 - 27y^3$

21. **(a)** $-6v^3 - 48$ **(b)** $81 - 375k^3$

22. **(a)** $108c^3 + 256d^3$ **(b)** $13k^3r^3 - 104s^3$

因式分解下列各式。**(23 – 30)**

23. **(a)** $k^2 + 6k - 16$ **(b)** $y^2 - 9y + 18$

24. **(a)** $x^2 + 11x + 28$ **(b)** $a^2 - 4a - 45$

25. **(a)** $2q^2 - 7q + 5$ **(b)** $3r^2 + r - 14$

26. **(a)** $4b^2 + 24b + 11$ **(b)** $6n^2 - 13n - 19$

27. **(a)** $10s^2 - 29s + 21$ **(b)** $9z^2 + 9z - 40$

28. **(a)** $8a^2 - 26a - 24$ **(b)** $-30p^2 - 27p - 6$

29. **(a)** $9p^2 + 18pq - 7q^2$ **(b)** $5c^2 + 32cd + 12d^2$

30. **(a)** $15x^2 - 16xy + 4y^2$ **(b)** $28m^2 - 20mn - 48n^2$

因式分解下列各式。**(31 – 40)**

31. **(a)** $6m^2n^4 - 21m^3n$ **(b)** $-2p^4q^3 - 8p^2q^4 - 4p^2q^3r$

32. **(a)** $12a^2 - 20ab - 9ac + 15bc$ **(b)** $10x + 20x^3y - 5x^4 - 40y$

33. **(a)** $4de + 2df + 6d + 2e + f + 3$ **(b)** $2m + 8n - 10 - 3mk - 12nk + 15k$

34. **(a)** $9x^2 - 8yz + 6xy - 12xz + 21x - 28z$ **(b)** $abc - 5b^2c + 2bc^3 - 4a^2b + 20ab^2 - 8abc^2$

35. **(a)** $(7r + 2)^2 - 64$ **(b)** $4x^2 - (6y - 5x)^2$

36. **(a)** $(a + 4b)^2 - (3a - 5b)^2$ **(b)** $(8m - 3n)^2 - (2m + 9n)^2$

37. **(a)** $(6p + 1)^2 - 12(6p + 1) + 36$ **(b)** $81 - 18(7k - 5) + (5 - 7k)^2$

38. **(a)** $9c^2 - 16d^2 - (3c - 4d)^2$ **(b)** $25p^2 + 10p - 49q^2 + 14q$

39. **(a)** $4x^2 + 25y^2 - 6x + 15y - 20xy$ **(b)** $36a^2 + 12ab + 4b^3 + 24ab^2 + b^2$

40. **(a)** $p^2 + 4pq + 4q^2 - 100$ **(b)** $9m^2 - 64n^2 - 42m + 49$

因式分解下列各式。**(41 – 44)**

41. **(a)** $(x + 4)^3 + 216$ **(b)** $27a^3 - (a + 2)^3$

42. **(a)** $24 + 3(m - 5)^3$ **(b)** $5(1 - 6k)^3 - 320$

43. **(a)** $(a + b)^3 - (2b - a)^3$ **(b)** $(3x - y)^3 + (x + 5y)^3$

44. **(a)** $27p^3 - 8q + q^3 - 24p$ **(b)** $a^3 - 6a^2b + 12ab^2 - 8b^3$

因式分解下列各式。**(45 – 50)**

45. **(a)** $36 - 27a + 5a^2$ **(b)** $9x^2 - 4y^2 + 16xy$

46. **(a)** $-4k^2 + 3k + 10$ **(b)** $-18n^2 + 45n - 25$

47. **(a)** $-54r - 27 - 24r^2$ **(b)** $42 - 10p - 12p^2$

48. **(a)** $6x^3 + 18x^2 - 24x$ **(b)** $4a^3b - 30a^2b^2 + 36ab^3$

49. **(a)** $(3m - 1)^2 - 4m$ **(b)** $21 - (2k + 5)(k + 3)$

50. **(a)** $(4p + 5)(p - 2) + (p + 2)^2$ **(b)** $(y + 7)(3y - 4) + (1 - y)(5y + 2) - 6$

51. **(a)** 因式分解 $36 - 48n + 16n^2$。

(b) 利用 **(a)** 部的結果，因式分解 $2m^2 - 72 + 96n - 32n^2$。

52. **(a)** 因式分解 $k^3 + 1$。

(b) 利用 **(a)** 部的結果，因式分解 $k^5 - k^3 + k^2 - 1$。

53. **(a)** 因式分解 $(b - 3a)^2 - 4b^2 + 12ab$。

(b) 利用 **(a)** 部的結果，因式分解 $(a^2 - 3a - 10)^2 - 4(a^2 - 10)^2 + 12a(a^2 - 10)$。

ANS:

Part 1:

1.	**(a)**	1	**(b)**	1
2.	**(a)**	7	**(b)**	3
3.	**(a)**	$\frac{1}{25}$	**(b)**	$-\frac{1}{216}$
4.	**(a)**	-1	**(b)**	64
5.	**(a)**	-3	**(b)**	$-\frac{1}{72}$
6.	**(a)**	$\frac{1}{4}$	**(b)**	$\frac{4}{81}$
7.	**(a)**	$\frac{125}{27}$	**(b)**	$-\frac{1}{243}$
8.	**(a)**	$\frac{1}{b^6}$	**(b)**	1
9.	**(a)**	x^{12}	**(b)**	$-y^{15}$
10.	**(a)**	x^5	**(b)**	$\frac{1}{y^5}$
11.	**(a)**	$\frac{10}{a^6}$	**(b)**	$-\frac{b^5}{2}$
12.	**(a)**	v^2	**(b)**	$\frac{1}{u^{13}}$
13.	**(a)**	a^{10}	**(b)**	$\frac{1}{b^4}$
14.	**(a)**	$\frac{n^{12}}{m^{15}}$	**(b)**	$\frac{1}{e^8 f^8}$
15.	**(a)**	$\frac{b^2}{16a^4}$	**(b)**	$-\frac{343d^{18}}{c^9}$
16.	**(a)**	$\frac{9t^{16}}{u^{10}}$	**(b)**	$\frac{1}{16x^{12}y^{20}}$
17.	**(a)**	x^2y^4	**(b)**	$\frac{v^5}{s^4}$
18.	**(a)**	$\frac{b^{10}}{a^4}$	**(b)**	$\frac{1}{c^2d^2}$
19.	**(a)**	$\frac{3}{4}$	**(b)**	37
20.	**(a)**	$-\frac{1}{81}$	**(b)**	$\frac{9}{14}$
21.	**(a)**	$-\frac{27}{4}$	**(b)**	$\frac{4}{25}$
22.	**(a)**	$\frac{2b^{20}}{a^8}$	**(b)**	$\frac{27p^{12}}{q^9}$
23.	**(a)**	$\frac{16u^7}{v^8}$	**(b)**	$-\frac{3a^{10}}{4b^9}$
24.	**(a)**	$\frac{y^{12}}{125x^{10}}$	**(b)**	$-\frac{8m^{10}}{n^6}$
25.	**(a)**	$\frac{p}{q^8}$	**(b)**	$\frac{s^{14}}{r}$
26.	**(a)**	$\frac{36q^6}{p^2}$	**(b)**	$\frac{8x^6}{y^{18}}$

27. **(a)** $6h^7k^9$ **(b)** $-\frac{4a^3}{3b}$

28. **(a)** $\frac{4m^{10}}{n^3}$ **(b)** $-\frac{h^{10}}{9k^{15}}$

29. **(a)** $\frac{9}{a^6b^2}$ **(b)** $\frac{xy}{2}$

30. **(a)** 2^{3n} **(b)** $\frac{1}{3^{4n+1}}$

31. **(a)** $\frac{1}{2^{6n}}$ **(b)** 3^{4n-2}

Part 2:

1.

	Polynomial	Number of terms	Coefficient of				Constant term	Degree of polynomial
			x^3	x^2	x	x^3y		
(a)	$5x - 7x^2 + 8x^3 - 2$	4	8	–7	5	0	–2	3
(b)	$3x^3y - 4x^2 + 6x$	3	0	–4	6	3	0	4
(c)	$-x^2 + 9x + 3$	3	0	–1	9	0	3	2
(d)	$8x - 5x^2 + 4x^3 - x^3y - 7$	5	4	–5	8	–1	–7	4

2. **(a)** $-6a^3 + 5a^2 + 3a - 9$
(b) $-9 + 3a + 5a^2 - 6a^3$

3. **(a)** $-2x^5 - 8x^2 + 7x + 11$
(b) $11 + 7x - 8x^2 - 2x^5$

4. (a) $8x + 2$ **(b)** $3y - 7$

5. (a) $x - 3y$ **(b)** $-y - 7x$

6. (a) $3x^2 - x + 1$ **(b)** $2x^2 - 5x + 4$

7. (a) $-x^2 - 12$ **(b)** $2x^2 - 9x - 7$

8. (a) $4x^2 + 7x + 6$ **(b)** $-5x^2 - 6x - 8$

9. (a) $-8x^2 + 2x$ **(b)** $5x^2 + x - 16$

10. (a) $-4x^2 - x + 15$ **(b)** $7x^2 - 11x - 8$

11. (a) $-x^3 - 10x^2 + 2x - 4$ **(b)** $6x^3 - 6x^2 + 5x + 7$

12. (a) $6x^2 + 18x$ **(b)** $-8x^2 + 14x$

13. (a) $-8x + 5x^2$ **(b)** $18x^2 + 3x^3$

14. (a) $28x^2 - 8x$ **(b)** $-10x^5 - 5x^4$

15. (a) $x^2 - 4x - 45$ **(b)** $-x^2 + 2x + 24$

16. (a) $2x^2 + 15x + 7$ **(b)** $15x^2 - 46x + 16$

17. (a) $-20x^2 - 17x + 24$ **(b)** $4x^3 + x^2 + 28x + 7$

18. (a) $x^2 - 7xy + 6y^2$ **(b)** $2x^2 + 9xy - 5y^2$

19. (a) $-40x^2 + 11xy + 2y^2$ **(b)** $-27x^2 + 75xy - 28y^2$

20. $18x^2 - 14$

21. $-2x^2 + 37x + 36$

22. $-x^3 - x^2 + x - 1$

23. $11x^3 - 9x^2 - 10x + 8$

24. $3xy + 10xz - 2z$

25. $8x^3 - 4x^2 - 4x - 17$

26. (a) $20x^3 + 4x^2 - 24x$ **(b)** $8x^4 - 7x^3 - 3x^2$

27. (a) $-6x^3 - 17x^2 + 16x + 14$ **(b)** $27x^4 + 9x^3 + 15x^2 - 7x - 4$

28. (a) $3x^3 - 19x^2 + x + 10$ **(b)** $12x^3 - 39x^2 + 58x - 35$

29. (a) $-8x^3 - 46x^2 - 25x + 90$ **(b)** $-16x^4 + 56x^3 - 22x^2 - 35x + 20$

30. $7x$

31. $9x^2 + 28x + 40$

32. $-18x^4 + 15x^3 - 30x^2 - 37x + 5$

33. $3x^3 + x^2 - 75x + 60$

Part 3:

1. (a) $6(p^2 + 4)$ **(b)** $x(3x - 1)$

2. (a) $-a(b + 7c)$ **(b)** $mn(m^2 - 4n)$

3. (a) $5(2x^2 - y + 4z)$ **(b)** $d(2c + d^3 + 9)$

4. (a) $2k(6k^2 + 4k - 1)$ **(b)** $-pq(p^2q^2 + p + 6q^2)$

5. (a) $(3x + 4y)(z + 3)$ **(b)** $(3a - c)(2d + b)$

6. (a) $(5m + 7)(m - 2n)$ **(b)** $(y^2 - 4x)(3x + 2y)$

7. (a) $(p + 6)(r + 3q)$ **(b)** $(2b + c)(2d - 5a)$

8. (a) $(4y - 3z)(x + 5y)$ **(b)** $(7m + n)(m^2 + 3n)$

9. (a) $(r + 4)(r - 4)$ **(b)** $(9 + k)(9 - k)$

10. (a) $(2 + 3p)(2 - 3p)$ **(b)** $(8c + 5)(8c - 5)$

11. (a) $(6x + y)(6x - y)$ **(b)** $(10n + 7m)(10n - 7m)$

12. (a) $(a + 4)^2$ **(b)** $(k - 7)^2$

13. (a) $(3s - 2)^2$ **(b)** $(6b + 5)^2$

14. (a) $(x - 8y)^2$ **(b)** $(2m + 9n)^2$

15. (a) $6(4b + 3a)(4b - 3a)$ **(b)** $x^2y^2(y + x)(y - x)$

16. (a) $7(c - 2)^2$ **(b)** $-3(3p + 4q)^2$

17. (a) $(k + 7)(k^2 - 7k + 49)$ **(b)** $(n - 9)(n^2 + 9n + 81)$

18. (a) $(6 - z)(36 + 6z + z^2)$ **(b)** $(5x + 4)(25x^2 - 20x + 16)$

19. (a) $(a + 3b)(a^2 - 3ab + 9b^2)$ **(b)** $(8p - q)(64p^2 + 8pq + q^2)$

20. (a) $(5m + 2n)(25m^2 - 10mn + 4n^2)$ **(b)** $(7x - 3y)(49x^2 + 21xy + 9y^2)$

21. (a) $-6(v + 2)(v^2 - 2v + 4)$ **(b)** $3(3 - 5k)(9 + 15k + 25k^2)$

22. (a) $4(3c + 4d)(9c^2 - 12cd + 16d^2)$ **(b)** $13(kr - 2s)(k^2r^2 + 2krs + 4s^2)$

23. (a) $(k - 2)(k + 8)$ **(b)** $(y - 6)(y - 3)$

24. (a) $(x + 4)(x + 7)$ **(b)** $(a - 9)(a + 5)$

25. (a) $(q - 1)(2q - 5)$ **(b)** $(r - 2)(3r + 7)$

26. (a) $(2b + 1)(2b + 11)$ **(b)** $(n + 1)(6n - 19)$

27. (a) $(2s - 3)(5s - 7)$ **(b)** $(3z - 5)(3z + 8)$

28. (a) $2(a - 4)(4a + 3)$ **(b)** $-3(2p + 1)(5p + 2)$

29. (a) $(3p - q)(3p + 7q)$ **(b)** $(c + 4d)(5c + 3d)$

30. (a) $(3x - 2y)(5x - 2y)$ **(b)** $4(m + n)(7m - 12n)$

31. (a) $3m^2n(2n^3 - 7m)$ **(b)** $-2p^2q^3(p^2 + 4q + 2r)$

32. (a) $(3a - 5b)(4a - 3c)$ **(b)** $5(2 - x^3)(x - 4y)$

33. (a) $(2d + 1)(2e + f + 3)$ **(b)** $(2 - 3k)(m + 4n - 5)$

34. (a) $(3x - 4z)(3x + 2y + 7)$ **(b)** $b(c - 4a)(a - 5b + 2c^2)$

35. (a) $(7r + 10)(7r - 6)$ **(b)** $3(2y - x)(7x - 6y)$

36. (a) $(4a - b)(9b - 2a)$ **(b)** $12(5m + 3n)(m - 2n)$

37. (a) $(6p - 5)^2$ **(b)** $49(2 - k)^2$

38. (a) $8d(3c - 4d)$ **(b)** $(5p + 7q)(5p - 7q + 2)$

39. (a) $(2x - 5y)(2x - 5y - 3)$ **(b)** $(6a + b)(6a + b + 4b^2)$

40. (a) $(p + 2q + 10)(p + 2q - 10)$ **(b)** $(3m + 8n - 7)(3m - 8n - 7)$

41. (a) $(x + 10)(x^2 + 2x + 28)$ **(b)** $2(a - 1)(13a^2 + 10a + 4)$

42. (a) $3(m - 3)(m^2 - 12m + 39)$ **(b)** $-45(2k + 1)(12k^2 - 12k + 7)$

43. (a) $(2a - b)(a^2 - ab + 7b^2)$ **(b)** $4(x + y)(7x^2 - 10xy + 31y^2)$

44. (a) $(3p + q)(9p^2 - 3pq + q^2 - 8)$ **(b)** $(a - 2b)^3$

45. (a) $(a - 3)(5a - 12)$ **(b)** $(x + 2y)(9x - 2y)$

46. (a) $-(k - 2)(4k + 5)$ **(b)** $-(3n - 5)(6n - 5)$

47. (a) $-3(2r + 3)(4r + 3)$ **(b)** $-2(2p - 3)(3p + 7)$

48. (a) $6x(x - 1)(x + 4)$ **(b)** $2ab(2a - 3b)(a - 6b)$

49. (a) $(m - 1)(9m - 1)$ **(b)** $-(k + 6)(2k - 1)$

50. (a) $(p - 1)(5p + 6)$ **(b)** $-2(y - 8)(y - 2)$

51. (a) $4(2n - 3)^2$ **(b)** $2(m + 4n - 6)(m - 4n + 6)$

52. (a) $(k + 1)(k^2 - k + 1)$ **(b)** $(k - 1)(k + 1)^2(k^2 - k + 1)$

53. (a) $-3(b - 3a)(a + b)$ **(b)** $-3(a - 5)(a + 2)(a^2 + a - 10)$